Tentamen i Numeriska metoder för DN1212,DN1214,DN1215, DN1240,DN1241,DN1243

Fredag 19/10 2012, kl 14-17

DEL 2 Lösningar

1. Ekvationslösning

a. Inför vänsterledsvektorn $\mathbf{f}$ där $f_1(x,y) = e^{x-y} + y - 1.1, \quad f_2(x,y) = 2e^{x+y} - x - 0.9$. Då erhålles jacobianen $J(x,y)$:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y} & 1 - e^{x-y} \\ -1 + 2e^{x+y} & 2e^{x+y} \end{pmatrix}$$

Låt vidare $\mathbf{u} = (x,y)^T$. Då blir Newtons metod

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k - J^{-1}(\mathbf{u}_k)\mathbf{f}(\mathbf{u})_\mathbf{k}$$

b. Insättning av $x = 0$ och $y = 0$ i jacobianen och högerledet ovan ger

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}(0,0) = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 1.1 \end{pmatrix}$$

Ekvationssystemet som ska lösas är $J(0,0)\delta\mathbf{u} = -\mathbf{f}(0,0)$ vilket ger $\delta\mathbf{u} = (0.1, -0.6)^T$

c. MATLAB-program

```
u=[0,0]';delta=[1,1]';
tabell=[u' delta'];
format short e
while abs(delta)>1e-6
f=[exp(u(1)-u(2))+u(2)-1.1;2*exp(u(1)+u(2))-u(1)-0.9];
J=[exp(u(1)-u(2)),1-exp(u(1)-u(2));-1+2*exp(u(1)+u(2)),2*exp(u(1)+u(2))];
delta=-J;u=u+delta;
tabell=[tabell;[u',delta']];
end
tabell
```

2. Begynnelsevärdesproblem

a. Låt $u_1 = y, \quad u_2 = dy/dt$. Systemet blir $du_1/dt = u_2, \quad u_1(0) = 1, \qquad du_2/dt = -u_1^2 - 1, \quad u_2(0) = 0$.

b. MATLAB-program

```
u=[1,0]';t=0;h=1e-3;
uout=[u'];tout=[t];
while u(1)>0
u=u+h*[u(2);-u(1)^2 - 1];
t = t + h;
uout = [uout; u'];
tout = [tout; t];
end
T = t;
plot(tout,uout(:,1))
```

c. Ekvationen för den räta linjen $y(t)$ mellan (t_{n-1}, y_{n-1}) och (t_n, y_n) är $y(t) - y_n = k(t - t_n)$, där $k = (y_n - y_{n-1})/h$. Detta ger $T = t_n - k/y_n$. I stället för satsen T=t för in följande satser
n=length(tout);
T=t-u(n,1)/((u(n,1)-u(n-1,1)/h))

3. Randvärdesproblem

a. Vi använder FDM (Finita DifferensMetoden). Definiera först ett grid: $x_0 = 0, x_1 = h, ...x_{n+1} = (n+1)h = 2$. Ställ upp en differensapproximation:

$$x = x_i : \qquad \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i^2 y_i + 1 = 0, \quad y_0 = 0, y_{n+1} = 1$$

Ekvationssystemet blir $Ay = b$, där

$$A = \begin{pmatrix} -2 + h^2 x_1^2 & 1 & 0 & 0.....0 \\ 1 & -2 + h^2 x_2^2 & 1 & 0.....0 \\ .... & & & \\ 0.....0 & 0 & 1 & -2 + h^2 x_n^2 \end{pmatrix} \qquad b = h^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ . \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ , \\ -1 \end{pmatrix}$$

b. Finita differensmetoden kombineras med sekantmetoden.
0. Låt K1=0, ”fejkat” värde för k.
1. Välj först en steglängd h.
2. Välj två startvärden för k: k1 och k2.
3. Lös randvärdesproblemet för k1 och k2. Detta ger två approximativa värden för y(1): y11 och y12.
4. Beräkna med sekantmetoden nästa k-värde: k3
5. Byt: k1=k2, k2=k3, y11=y12.
6. Beräkna approximativt värde för y(1) för (nya) k2: ger (nytt) y12
7. Om abs(k2-k1)>1e-6 gå till 4.
8. Låt K2=k2, den approximation som sekanttoleransen 1e-6 ger.
9. Om abs(K2-K1)>1e-4, låt h=h/2, K1=K2, gå till 1.
10. Tag K2 som slutlig approximation till k.