NADA, KTH, Bengt Lindberg

LÖSNING till Tentamen i Numeriska Metoder, Grundkurs II, 2D1240
Onsdag 2006-12-18 kl 14-17

DEL 2 Hjälpmedel är rosa formelsamlingen som får tas fram när del 1 lämnats in.

(6) P1. Vi har tre ekvationer och tre obekanta; x_c, x_p, y_p Skriv en funktionsfil för ekvationerna

```
function G=fparab(z);
global R
xc=z(1); xp=z(2); yp=z(3);
G=[(xp-xc)^2+(yp-R)^2-R^2
     xp-0.4*yp^2
    2*(xp-xc)+2*(yp-R)/(0.8*yp)];
```

Ur figuren får vi en startgissning. Med Newtons metod och den givna rutinen numjac blir vårt program enl nedan

```
clear,clf,hold off
global R
format short e, format compact
R=1.5;
z=[10;10;2*R]; %startgissning
dz=z;
while norm(dz,inf) >1.E-12*norm(z,inf),
  F=fparab(z); J=numjac('fparab',z);
  dz=-J\F; z=z+dz;
  disp(norm(dz,inf))
end
z
xp=0:0.2:z(1)+2*R; yp=sqrt(xp/0.4);
fi=0:pi/100:2*pi;
x=z(1)+R*cos(fi); y=R+R*sin(fi);
plot(xp,yp,x,y);axis equal;
grid
```

P2. Approximation beräknad med metoden med steglängden h betecknas $a(h)$. Felet i beräknat värde ges av $a(h) - f'(1.2)$.

Vi antar att

$$a(h) = f'(1.2) + ch^p + ...$$

Från de 4 approximationerna kan vi beräkna vänsterledet i

$$a(h) - f'(1.2) = ch^p + ...$$

för $h = H, 2H, 4H, 8H, H = 6.25 \times 10^{-3}$. Detta ger ekvationerna

$$675 = c(8H)^p + \cdots$$
$$167 = c(4H)^p + \cdots$$
$$42 = c(2H)^p + \cdots$$
$$11 = c(H)^p + \cdots$$

Vi är endast intresserade av värdet på p. Försummas högre ordningens termer, och bilda kvoter mellan två på varandra följande relationer så får vi

$$\frac{675}{167} = 2^p, \quad \frac{167}{42} = 2^p, \quad \frac{42}{11} = 2^p,$$

Alla kvoterna är ungefär 4, så $p = 2$. Metodens noggrannhetsordning är 2.

(6) P3. Vi diskretiserar intervallet $[2, 4]$ enligt $x_i = 2 + i \times h, h = 0.5$, dvs vi inför $x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 3.0, x_3 = 3.5, x_4 = 4$. Vi söker approximationer y_i till $y(t_i)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Ekvationen diskretiseras i de inre punkterna $i = 1, 2, 3$ enligt

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \frac{\sin(0.4\pi x_i)}{1 + y_i^2}$$

Med randvärdena $y_0 = 1$ och $y_4 = 3$ insatta får vi

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{y_2 - 2y_1 + 1}{h^2} - \frac{\sin(0.4\pi x_1)}{1 + y_1^2} \\ \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} - \frac{\sin(0.4\pi x_2)}{1 + y_2^2} \\ \frac{3 - 2y_3 + y_2}{h^2} - \frac{\sin(0.4\pi x_3)}{1 + y_3^2} \end{pmatrix}$$

Vektorn $\mathbf{y}$ har tre komponenter liksom den vektorvärda funktionen $\mathbf{F}$.

(5) P4a. Skriv om systemet till ett system av första ordningen. Inför nya variabler $z_1 = x, z_2 = dx/dt, z_3 = y, z_4 = dy/dt$ och formulera en differentialekvation för varje variabel:

$$z_1' = z_2$$
$$z_2' = -\frac{C}{m} z_2 w$$
$$z_3' = z_4$$
$$z_4' = -g - \frac{C}{m} z_4 w$$

där $w = \sqrt{z_2^2 + z_4^2}$ I uthoppsögonblicket gäller $x' = w_0 \cos\Phi$, $y' = w_0 \sin\Phi$, så begynnelsevärdena blir $z_1(0) = 0, z_2(0) = 20\cos 25^o, z_3(0) = 60, z_4(0) = 20\sin 25^o$

Vi skriver först en matlabrutin `fp4a.m` för det högerledsfunktionen i detta system

```
function F=fp4a(t,z);
C=0.08; m=80; g=9.81;
w=sqrt(z(2)^2+z(4)^2);
F=[z(2);-C/m * z(2)*w; z(4); -g-C/m *z(4)*w];
```

Därefter skriver vi ett program som använder den bifogade rutinen RKsteg.

```
t=0; z=[0;20*cos(25*pi/180);60;20*sin(25*pi/180)];
tp=t; zp=z';
h=0.1;
while z(3) > 0,
  [t,z]=RKsteg(@fp4a,t,z,h);
  tp=[tp;t]; zp=[zp;z'];
end
plot(zp(:,1),zp(:,3));
```

(3) P4b. Programmet i a. modifieras enligt nedan

```
Ub=inline('32.5-25*atan(x/40-1.2)','x');
t=0; z=[0;20*cos(25*pi/180);60;20*sin(25*pi/180)];
Underbacke=Ub(z(1));
tp=t; zp=[z' Underbacke];
h=0.1;
while z(3) >Underbacke ,
  [t,z]=RKsteg(@fp4a,t,z,h);
  tp=[tp;t]; Underbacke=Ub(z(1)); zp=[zp;[z' Underbacke]];
end
plot(zp(:,1),zp(:,3),zp(:,1),zp(:,5));
```