CSC, NADA, KTH

Lösning till DN1240 Numeriska Metoder gk 2
Fredagen den 21/12 2007 kl 14-17

Hjälpmedel är rosa formelsamlingen som får tas fram när del 1 har lämnats in.
Del 2: 25 poäng.

P1. Inför $\mathbf{x} = (z, k)^T$ och skriv

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} z^2k - k^3z - 2.02, \\ 2zk + z^3k^{-1} - 11.78 \end{pmatrix}$$

Newtons metod lyder

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{d}_n \quad \text{där} \quad J(\mathbf{x}_n)\mathbf{d}_n = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

med $J(\mathbf{x}_n)$ Jakobianen till $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, dvs

$$J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2zk - k^3 & z^2 - 3k^2z \\ 2k + 3z^2/k & 2z - z^3/k^2 \end{pmatrix}$$

Det linjära ekvationssystem som skall lösas i den första iterationen med Newtons metod är

$$J(\mathbf{x}_0)\mathbf{d}_0 = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \quad \text{där} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Med siffervärdena insatta får vi

$$J(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 14 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} -0.02 \\ 0.22 \end{pmatrix}$$

```
x=[2; 1]; dx=x;
iter =0;
while norm(dx,inf)>1.E-8 && iter <10
  z=x(1); k=x(2);
  f=[z^2*k-k^3*z-2.02; 2*z*k+z^3/k-11.78];
  J=[2*z*k-k^3    z^2-3*k^2*z
     2*k+3*z^2/k  2*z-z^3/k^2];
  dx=-J\f;
  disp([x f dx])
  x=x+dx; iter=iter+1;
end
x
```

Iterationerna visar sig ej konvergera från denna startgissning! Systemet saknar eventuellt lösning! Iterationsräknaren är viktig.

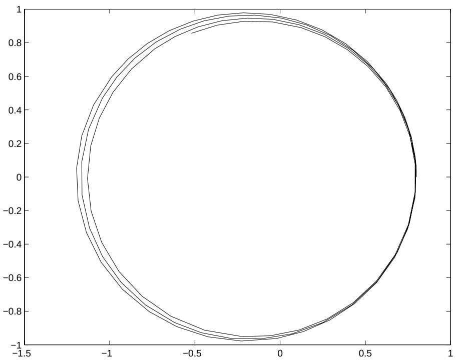
P2. **P2a.**

```
function f=fodep2(t,u);
    r=sqrt(u(1)^2+u(3)^2);
    f= [u(2)
        -u(1)/r^3
        u(4)
        -u(3)/r^3];
```

(4) P2b. `E=0.2;`

```
u0=[1-E; 0; 0; sqrt((1+E)/(1-E))];
[Tp,Up]=ode45(@fodep2,[0 20], u0);
plot(Up(:,1),Up(:,3))

%plotbilden visar att flera varv
%av den periodiska banan ritas
```



(3) P2c. `clear, clf`

```
E=0.2;
t0=0; u0=[1-E; 0; 0; sqrt((1+E)/(1-E))];
h=0.01;
t=t0; u=u0; Tp=[t]; Up=[u'];
while t<20,
  [t,u]=RKsteg(@fodep2,t,u,h);
  Tp=[Tp;t];  Up=[Up; u'];
end;
plot(Up(:,1),Up(:,3))
%ovanstående är alternativ lösning till P2b

ind=find( Tp<2 );
%ind=find( Tp<2 | Tp>8 );
%alternativ behandling av endast första perioden
Up(ind,[1 3])=1.E8;
L=sqrt((Up(:,1)-u0(1)).^2+Up(:,3).^2);
[Mn,In]=min(L)
Tperiod=Tp(In)
```

P3a. Diskretisera området enligt nedan med steget $h = 0.5$

```
 1         1.5        2         x-koordinater

 x----------x----------x

1/2         z        1/3        u-värden, z okänd approx till u(1.5)
u_0        u_1       u_2
```

Approximera differentialekvationen i den inre punkten $x = 1.5$ enligt

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} - u_n^3 + u_n \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = 0$$

d.v.s med värdena i figuren ovan

$$\frac{\frac{1}{3} - 2z + \frac{1}{2}}{0.5^2} - z^3 + z\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{1} = 0$$

Detta är vår ekvation!

P3b. Området $x \in [1, 2]$ diskretiseras med steget $h = 0.5$, med diskretiseringspunkter $x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2.0, x_3 = 2.5$ (fiktiv punkt) samt approximativa lösningar $z_0, z_1, z_2, z_3, \quad z_i \approx u(x_i)$. Se figuren nedan

```
 1         1.5        2         2.5          x-koordinater

 x----------x----------x----------x

1/2        z_1       z_2        z_3          u-värden,
z_0
```

Vi har nu två inre punkter $x = 1.5$ och $x = 2$ där differnsapproximationen ovan kan användas. Detta ger

$$\frac{z_2 - 2z_1 + \frac{1}{2}}{0.5^2} - z_1^3 + z_1\frac{z_2 - \frac{1}{2}}{1} = 0$$

$$\frac{z_3 - 2z_2 + z_1}{0.5^2} - z_2^3 + z_2\frac{z_3 - z_1}{1} = 0$$

Randvillkoret i högra randen approximeras enligt

$$z_2 + 3\frac{z_3 - z_1}{1} = 0$$

Detta är ett icke-linjärt ekvationssystem med tre ekvationer för våra tre obekanta z_1, z_2, z_3.