CSC, NADA, KTH

Namn: ....

Personnummer: ....

DN1240 Numeriska Metoder gk 2
Fredagen den 21/12 2007 kl 14-17

Skrivtid 3 tim. **Maximal poäng** 35 + bonuspäng från labbarna. Maxpoäng för uppgifterna anges inom parantes bredvid uppgiftsnumret.

Nedre gräns för betyg **E**: 20 poäng.

Del 1: 10 poäng. **Skrivtid högst 1 timme. Inga hjälpmedel.**

När du lämnar in del 1 får du del 2, och får ta fram rosa formelsamlingen.

(1) T1. Ange Newtons ansats för ett interpolerande polynom $P(x)$ som går genom (x, y)-punkterna $(-3, -27), (5, -1), (10, 0), (17, -20)$. **OBS: det räcker med ansatsen.**

(2) T2a. Ruge-Kuttas metod (RK4) är bättre än Eulers metod, fjärde noggrannhetsordningen jämfört med första, säger man. Vad menar man med det?

(2) T2b. En metod (ML) har gett följande approximationer till lösningen i en punkt, beräknade med steglängderna $0.025, 0.0125, 0.00625, 0.003125$, dvs succesivt halverade steglängder.

```
3.68347179
3.68344894
3.68344323
3.68344180
```

Uppskatta noggrannhetsordningen för metoden ML från värdena

VÄND!

(3) T3. Bestäm minstakvadratlösningen till

$$c_1 + 2c_2 = 6, \quad c_1 + c_2 = 2, \quad -3c_1 + c_2 = 0$$

Vad är det som minimeras vid minstakvadratanpassning?

(2) T4. Följande talföljd är korrektionstermerna som genererats av ett program för Newtons metod.

```
1.2822e-01
6.6127e-03
2.2112e-05
1.1683e-07
2.2524e-09
4.3424e-11
8.3716e-13
```

Vilken konvergensorning har metoden på detta problem? Vad är det ungefärliga numeriska värdet på den asymptotiska felkonstanten?

CSC, NADA, KTH

DN1240 Numeriska Metoder gk 2
Fredagen den 21/12 2007 kl 14-17

Hjälpmedel är rosa formelsamlingen som får tas fram när del 1 har lämnats in.
En användbar **Matlabrutin** mm finns på baksidan.
Del 2: 25 poäng.

(7) P1. Givet följande ekvationer för k och z

$$z^2k - k^3z = 2.02, \quad 2zk + z^3k^{-1} = 11.78$$

Problemet skall lösas med Newtons metod. Använd startvärdet $z = 2, k = 1$. Ställ upp det linjära ekvationssystem som skall lösas om man vill genomföra en iteration med Newtons metod för det givna systemet.

Skriv därefter ett Matlabprogram som bestämmer lösningen till de ursprungliga ekvationerna med fel mindre än 10^{-8}. Använd startgissningen ovan.

P2. Differentialekvationssystmet

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r^3},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r^3},$$

med $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ och

$$x(0) = 1 - E, y(0) = 0, x'(0) = 0, y'(0) = (\frac{1+E}{1-E})^{1/2}$$

med $E = 0.2$. Systemet beskriver en satellits bana $(x(t), y(t))$ runt en planet. Storheten r anger avståndet från satelliten till planeten, som ligger i origo,

(3) P2a. Inför nya variabler och skriv om problemet som ett kopplat system av första ordningen $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$. Skriv därefter en matlabfunktion

```
function f=fodep4(....);
....
```

som beräknar högerledet i detta system..

(4) P2b. Skriv ett Matlabprogram som beräknar minst ett varv av satellitbanan.(Låt t gå från 0 till 20.) Rita upp y som funktion av x. **OBS:** Om du inte löst P2a får du använda en påhittad funktion `fodep4` och ange indata och utdata för den.
Bifogad matlabrutin får användas.

(3) P2c. Satellitbanan antas vara periodisk med period T. Då beskriver $(x(t), y(t))$ en sluten kurva i xy-planet. Periodlängden T kan approximativt bestämmas genom att avståndet $L(t)$ mellan startpunkten $(x(0), y(0))$ och satellitens läge $(x(t), y(t))$ studeras. T erhålls som det t-värde för vilket $L(t)$ är minst (för $2 < t < 20$). Ändra eller utöka programmet i P2b så $L(t)$ tabelleras och lagras i en vektor, och T därefter bestäms. **VÄND!**

P3. Givet differentialekvationen

$$u'' = u^3 - uu'$$

(4) P3a. Låt randvillkoren vara

$$u(1) = 1/2; \quad u(2) = 1/3;$$

Diskretisera området $x \in [1, 2]$ med steget $h = 0.5$, och inför diskretiseringspunkter samt en approximativ lösning $z \approx u(1.5)$.
Formulera en ekvation för den approximativa lösningen z genom att diskretisera differentialekvationen och använda randvillkoren. Ekvationen skall ej lösas.

(4) P3b. Låt randvillkoren vara

$$u(1) = 1/2; \quad u(2) + 3u'(2) = 0;$$

Diskretisera området $x \in [1, 2]$ med steget $h = 0.5$, och inför diskretiseringspunkter $x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2.0, x_3 = 2.5$ (fiktiv punkt) samt approximativa lösningar $z_0, z_1, z_2, z_3, \quad z_i \approx u(x_i)$.
Formulera ett ekvationssystem för den approximativa lösningen genom att diskretisera differentialekvation och randvillkor. Ekvationssystemet skall ej lösas.

Matlabrutin:

```
---------------------------------------------------------

function [tu,yu]=RKsteg(F,t,y,h)
% beräknar ett steg med steglängden h från (t,y) till (tu,yu)
% med Runge-Kuttas metod av  ordning 4 för
% differentialekvationssystemet  y'=F(t,y)
 k1=h*feval(F,t,y);
 k2=h*feval(F,t+h/2,y+k1/2);
 k3=h*feval(F,t+h/2,y+k2/2);
 k4=h*feval(F,t+h,y+k3);
yut=y+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
tu=t+h;

----------------------------------------------------------
```

Hjälptext (del av) till Matlabfunktionen `min`

```
----------------------------------------------------------
help min
 MIN    Smallest component.
    For vectors, MIN(X) is the smallest element in X.

    [Y,I] = MIN(X) returns the index of the minimum value in integer I.
```