Föreläsning 1

Numeriska metoder grundkurs II, DN1240

Carina Edlund
carina@nada.kth.se

Mottagningstid i rum 4516:
onsdagar kl. 13 - 15

Kurshemsida:
http://www.csc.kth.se/utbildning/kth/kurser/DN1240/numi09/

Ekvationslösning

- Förbehandling av ekvation
- Ekvationslösare
- Är resultaten pålitliga?
- Absolut- och relativfel
- Korrekta decimaler och siffror

Exempelekvation

$$x^2 = 2$$

eller på standardform

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

Förbehandling av ekvation

Använd t.ex. matematiska kunskaper och rita figurer

Använd matematiska kunskaper.

- Vilken är definitions- och värdemängden?
  För exemplet gäller att x kan anta alla värden och att $y \geq -2$.
- Har funktionen speciella egenskaper såsom avtagande, växande, periodisk ...?
  För exemplet gäller att funktionen är avtagande för x<0 och för x>0 är funktionen växande
- Vilka är extrempunkterna för funktionen?
  Minimum är då x=0 och ger då y= -2
- Ytterligare observationer
  $f(\pm 2) = 2$

Förbehandling, rita figur.

Matlab:

```
% specificera definitionsområdet
xstart = -2
xslut = 2

% tänk på att ta små steg så att kurvan blir relevant!
antal = 100
xsteg = (xslut - xstart)/antal
x = xstart: xsteg : xslut

% funktionen beräknas
y = x.^2 - 2                % OBS! Komponentvis upphöjning

% funktionen plottas
plot(x, y)
```

Ekvationslösare

Duger ett grovt uppskattat värde?

- Om ja, använd det värdet
- Om nej, använd en metod för att lösa ekvationen t.ex.
  - Intervallhalveringsmetoden
  - Sekantmetoden
  - Newton-Raphsons metod, NR
  - Fixpunktsmetoden

Ekvationslösare, intervallhalveringsmetoden

Säg att man vet att $f(x)$ har EN rot i intervallet $a \leq x \leq b$

- Om intervallet är litet nog så returneras $(a+b)/2$ som skattning till roten annars
  - Dela intervallet på hälften $m = (a+b)/2$
  - Om $f(m) = 0$ så är roten funnen och m returneras annars
    - Undersök i vilken halva roten ligger. Intervallhalveringen görs ytterligare en gång med antingen intervallet $[a, m]$ eller $[m, b]$.

Ekvationslösare, sekantmetoden

$$x_{n+1} = x_n - h, \qquad \text{där korrektionstermen } h \text{ är}$$

$$h = (x_n - x_{n-1})/(f(x_n) - f(x_{n-1})) * f(x_n), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Idén bakom sekantmetoden:

- En sekant dras mellan punkterna $(x_0, f(x_0))$ och $(x_1, f(x_1))$.
- Skärningen mellan sekanten och x-axeln beräknas med:
  $x_2 = x_1 - (x_1 - x_0)/(f(x_1) - f(x_0)) * f(x_1)$
- x_2 är ett bättre värde till roten
- Om x_2 är ett tillräckligt bra värde returneras det annars
  - Upprepa metoden med de två nya punkterna $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$.

Ekvationslösare, räkna sekantmetoden

Startgissningar:

x0 = 1 och x1 = 2

Gör beräkningarna och ställ upp dem i tabellform

x0	x1	fx0	fx1	h
1.0000	2.0000	-1.0000	2.0000	0.6667
2.0000	1.3333	2.0000	-0.2222	-0.0667
1.3333	1.4000	-0.2222	-0.0400	-0.0146
1.4000	1.4146	-0.0400	0.0012	0.0004

osv.

Ekvationslösare, Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - h, \qquad \text{där korrektionstermen } h \text{ är}$$

$$h = f(x_n)/f'(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

- Skaffa ett startvärde x_0 t.ex. ur grafen. Obs! $n = 0$.
- Beräkna $f(x_n)$, $f'(x_n)$ och h.
- Beräkna det nya värdet på x_{n+1}, om det är bra nog returnera resultatet x_{n+1} annars gör ytterligare en beräkning av $f(x_{n+1})$, $f'(x_{n+1})$ och h osv...

Vad är bra nog?
Titta på korrektionstermen h! Om $|h| \geq tolerans$ så fortsätter sökandet efter roten annars är en rot som är bra nog funnen.

Ekvationslösare, räkna NR

```
Startgissning:
x0 = 1

Gör beräkningarna och ställ upp dem i tabellform

      x          f         fprim      h

    1.0000   -1.0000    2.0000   -0.5000

    1.5000    0.2500    3.0000    0.0833

    1.4167    0.0069    2.8333    0.0025

    1.4142

osv.
```

Ekvationslösare, NR med Matlab:

```
x = 1              % startgissning
h = 1;
tolerans = 1e-8;    % = 10^(-8)

% det sökta värdet beräknas tills noggrannheten uppnås
while abs(h) > tolerans
  f = x^2 - 2;           % beräknar funktionsuttrycket i x
  fprim = 2*x;           % beräknar derivatan av funktionen i x
  h = f/fprim;           % korrektionen beräknas
  x = x - h              % det nya x-värdet beräknas
end
x                        % resultatet skrivs ut
```

Ekvationslösare, fixpunktsmetoden

Se kurslitteratur!

Är resultaten pålitliga?

- Kolla konvergens
  Konvergens = en följd av värden närmar sig ett och samma tal
  Divergens = en följd av värden närmar sig INTE ett tal (olika värden eller oändligheten)

För att kontrollera att resultaten är tillförlitliga tittar man på hur metoden konvergerar och att den konvergerar regelbundet.

Konvergensordning p: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-rot}{(x_n-rot)^p} \approx K \neq 0$

$p = 1$ ger linjär konvergens som t.ex. fixpunktsmetoden har

$p = 2$ ger kvadratisk konvergens som t.ex. NR har

För sekantmetoden gäller $p \approx 1.62$

Är resultaten pålitliga?

I praktiken kan man räkna ut den asymptotiska felkonstanten K i varje iteration för att sedan studera denna följd. När den följden uppvisar någorlunda konstanta värden kan man lita på resultaten man erhållit.

Obs! Det är mycket vanligt att följden uppvisar konstiga värden både i början och slutet vilket beror på gissade startvärden respektive datorns begränsade precision.

NR metod med konvergenskoll

```
x = 1;                                          % Startgissning
h = 1;                                          % Startvärde för h
tolerans = 1e-8;                                % = 10^(-8)
disp('   x       h        K ')                 % Skriver tabellrubriker

while abs(h) > tolerans
  hOld = h;                     % Det gamla värdet spars undan
  f = x^2 - 2;                  % Beräknar funktionsuttrycket i x
  fprim = 2*x;                  % Beräknar derivatan av funktionen i x
  h = f/fprim;                  % Korrektionen beräknas
  K = h/hOld^2;                 % Felkonstanten beräknas
  disp([x h K])                 % Skriver ut en tabellrad
  x = x - h;                    % Det nya x-värdet beräknas
end
x                               % Resultatet skrivs ut
```

Resultatutskrift för NR metod med konvergenskoll:

x	h	K
1.00000000000000	-0.50000000000000	-0.50000000000000
1.50000000000000	0.08333333333333	0.33333333333333
1.41666666666667	0.00245098039216	0.35294117647060
1.41421568627451	0.00000212389982	0.35355285962658
1.41421356237469	0.00000000000159	0.35352702932042

```
x =
   1.41421356237310
```

Ur tabellen läses att $K \approx 0.35$ och att antalet nollor för h ungefär fördubblas i varje iteration.

Absolutfel och relativfel.

$\widetilde{x}$ kallas ett närmevärde till x. $\widetilde{x}_{sqrt(2)} = 1.4142$

Absolutfel definieras som $e_x = \widetilde{x} - x$

$e_{sqrt(2)} = \widetilde{x}_{sqrt(2)} - sqrt(2) = 1.4142 - 1.414213562... = -0.000013562...$

Relativfel definieras som $r_x = e_x/x$

$r_{sqrt(2)} = e_{sqrt(2)}/sqrt(2) = -0.000013562.../1.414213562... = -0.00000959..$

Obs! Absolut- och relativfel kan vara både negativt och positivt!

Korrekta decimaler och siffror

Korrekta decimaler

Ett närmevärde $\widetilde{x}$ har d korrekta decimaler då $|e_x| < 0.5 * 10^{-d}$

$e_{sqrt(2)} \approx -0.000014$ $\qquad |e_{sqrt(2)}| < 0.00005 = 0.5 * 10^{-4}$

alltså har $\widetilde{x}_{sqrt(2)}$ 4 korrekta decimaler.

Korrekta siffror

De korrekta siffrorna för närmevärdet bildas av första ickenollan ned till den sista korrekta decimalen.

$\widetilde{x}_{sqrt(2)}$ har 5 korrekta siffror.

Funderingar

- Vilken metod är bäst?
- Fungerar dessa metoder i alla väder?
- Vad händer om ekvationen är behäftad med fel, dvs indatafel?
- Hur påverkar indatafel resultatet?
- ...
- ...