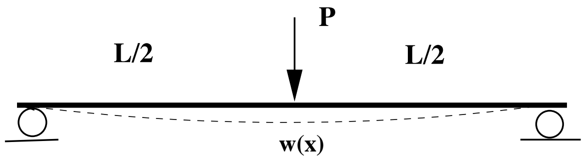
Katarina Gustavsson
NADA
25 mars 2008

BALKEN

En homogen balk av höghållfast stål är fritt upplagd horisontellt på två rullstöd med avståndet $L = 2.00\ m$. Balken har ett cirkulärt tvärsnitt med en radie $r = 2.00 \cdot 10^{-2}\ m$ och en elasticitetsmodul $E = 2.00 \cdot 10^{11}\ N/m^2$. Mitt på balken verkar en nedåtriktad kraft $P = 100\ N$. Man vill beräkna balkens utböjning, $w(x)$.



För ett tvärsnitt vid läget x finns ett samband mellan momentet $M(x)$ och balkens utböjning $w(x)$. Om kraften P är tillräckligt liten ges detta samband av följande linjära modell

$$\frac{M(x)}{EI} = -w''(x). \tag{1}$$

I är yttröghetsmomentet för balken och ges utav formeln

$$I = \frac{\pi r^4}{4}$$

Momentet beror av kraften P enligt

$$M(x) = \begin{cases} -\frac{Px}{2} & x \leq \frac{L}{2} \\ -\frac{PL}{2}(1 - \frac{x}{L}) & x \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

Randvillkoren, att balken är fritt upplagd, kan skrivas som

$$w(0) = 0, \quad \text{och} \quad w(L) = 0. \tag{2}$$

Ekvation (1) tillsammans med randvillkoren (2) kan lösas numeriskt med hjälp av finita differensmetoden. Om vi diskretiserar balken i N punkter, $x_j = jh,\ j = 0, 1, \ldots N+1,\ h = L/(N+1)$, med en andra ordningens noggrann approximation får vi följande:

$$\frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} = -\frac{M(x_j)}{EI}, \quad j = 1, 2 \ldots N \tag{3}$$
$$w_0 = 0 \quad w_{N+1} = 0 \quad \text{(ges av randvillkoren)}$$

där w_j är utböjningen i punkten $x = x_j$. Diskretiseringen leder till ett linjärt ekvationssystem

$$A\mathbf{w} = \mathbf{f} \tag{4}$$

där A är av storlek $N \times N$ och $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots w_N)$ är en vektor med de obekanta utböjningarna. Vektorn $\mathbf{f}$ ges av högerledet i ekvation (3).

a) Skriv ner matrisen A med papper och penna. Vilken struktur har matrisen A ?

b) Skriv ett Matlab-program som löser randvärdesproblemet. Matrisen A kommer endast att ha ett fåtal nollskilda element. Matrisen skapar du i Matlab enklast på följande sätt:

```
e = ones(N,1);
A = spdiags([e -2*e e], -1:1, N, N);
```

Kommandot `spdiags` är ett kommando för att skapa glesa matriser. Gör (`help spdiags`) för mer information.

Börja med att räkna ut utböjningen w för fallet $N = 4$. Lösningen får du genom att lösa det linjära ekvationssystemet $A\mathbf{w} = \mathbf{f}$. Kontrollera att A har rätt utseende genom att skriva `full(A)` i matlab.
Du behöver också räkna ut $\mathbf{f}$ som ges av högerledet i ekvation (3) och sambanden för momentet, $M(x)$, och yttröghetsmomentet, I. Använd värdena på L, E, P och r enligt ovan. Lösningen, $\mathbf{w}$, kommer att innehålla utböjningen i alla punkter, x_j utom i randpunkterna där $w = 0$.

Plotta utböjningen som funktion av x. Hur stor är den maximala utböjningen ?

c) Fördubbla antalet delintervall ett antal gånger och studera den maximala nedböjningen. Kontrollera även att noggrannhetsordningen stämmer.