LABORATION 1

Ekvationslösning, kurvanpassning och interpolation

Vid redovisningen ska båda i laborationsgruppen kunna redogöra för teori, algoritmer och resultat! Var väl förberedda så att varje delredovisning går snabbt och smidigt (kurvor plottade, numeriska resultat noterade – gärna handskrivna i marginalen på detta papper). Sista dag för bonuspoäng: 13/2.

0. **MÖ-uppgifterna**

   Arbeta igenom så många som möjligt av MÖ-uppgifterna men prioritera uppgifterna 1-5 och 9-12. Du hittar MÖ-uppgifterna på kurshemsidan.
   Om du tycker att det tar alltför lång tid att göra dem, kan du hoppa över några nu. Men gå i så fall tillbaka och titta på de resterande MÖ-uppgifterna senare!

1. **Skärning mellan lur och cylinder med Newton-Raphsons metod**

   I figuren nedan syns konturerna av en cylinder och en lur, båda med längden $L = 2$. För att få 3-dimensionella objekt roteras kurvorna y_{lur} och $y_{cyl} = R$ kring x-axeln och den volym som uppstår för dem båda är $V = 1.4002$. För cylindern gäller att radien $R = \sqrt{V/(2\pi)}$.

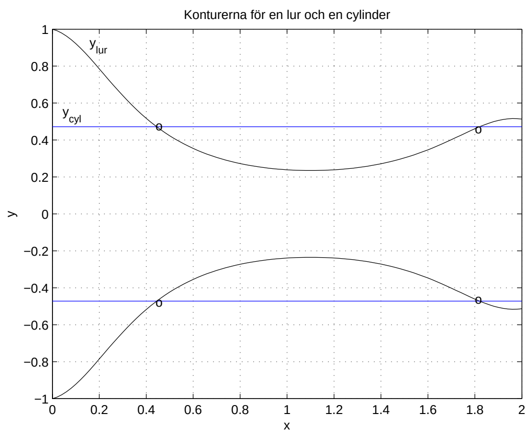
   Lurens kontur ges av funktionen

   $$y_{lur}(x) = e^{-x/3}/(2 - \cos \pi x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

   (a) Plotta nedanstående figur. Skärningspunkterna för luren och cylindern kan markeras.

   (b) Använd Newton-Raphsons metod för att beräkna var cylindern och luren skär varandra. Visa att konvergensen är kvadratisk genom att i tabellform skriva ut lämpliga värden i varje iterationssteg. Hur många iterationer behövs? Skriv funktionen på standardform och så att den är lätt att derivera!

   (c) Beräkna hur mycket en osäkerhet på ± 0.0001 i rotationsvolymen V påverkar minst en av skärningspunkternas x-koordinater.



Namn: ....

2. **Löparbana med sekantmetoden**

En ellipsformad 400-meters löparbana ska anläggas på en plan som är 160 meter lång. Hur bred plan krävs? Lös med sekantmetoden och använd Ramanujans formel för omkretsen.

Den indiske självlärde matematikern Srinivasa Ramanujan (1887–1920) föreslog följande approximativa formel för ellipsens omkrets:

$$O_{Ramanujan} = \pi(a+b)\left(1 + \frac{3c}{10+\sqrt{4-3c}}\right) \quad \text{där} \;\; c = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

samt att a och b är ellipsens halvaxlar

Uppgift 1 och 2 godkända (datum, lärarsign): ....

3. **Dagens längd i Stockholm**

Tabellen nedan anger dagens längd i Stockholm den första dagen i varje månad under sommarhalvåret (tiden är angiven decimalt):

Månad:	1 april	1 maj	1 juni	1 juli	1 aug	1 sep
Dagnr :	91	121	152	182	213	244
Solen uppe:	13.2	15.8	18.0	18.4	16.6	14.1

a) Plotta de sex punkterna. Det gäller att anpassa ett andragradspolynom till dem med minstakvadratmetoden. Hur lyder normalekvationerna och hur många rader och kolumner har matrisen i normalekvationerna i detta fall?
Beräkna polynomets koefficienter och rita polynomkurvan med tät indelning, dagligen från vårdagjämningen dag 80 till höstdagjämningen dag 265.
Hur länge är solen uppe på nationaldagen den 6 juni enligt denna modell?

b) Tabellen kompletteras med vinterhalvårets värden:

Månad:	1 jan	1 feb	1 mars	1 okt	1 nov	1 dec
Dagnr :	1	32	60	274	305	335
Solen uppe:	6.1	8.0	10.4	11.4	8.7	6.6

Markera de tolv punkterna i en figur. Ett trigonometriskt uttryck med perioden $T = 365$ bör kunna ge god anpassning:

$$F(t) = c_1 + c_2 \cos\omega t + c_3 \sin\omega t, \;\text{där}\; \omega = 2\pi/T.$$

Undersök detta och rita kurvresultatet (dagligen från nyårsdagen till dag 365) tillsammans med givna data. Rita också residualvektorns tolv komponenter mot de tolv givna dagnumren. Beräkna felkvadratsumman samt nationaldagens soltid enligt denna modell.

c) (Frivillig uppgift) Residualvektorn visar periodiska egenskaper (vilken frekvens?) och det innebär att modellen bör kunna förbättras till:

$F(t) = c_1 + c_2 \cos\omega t + c_3 \sin\omega t + c_4 \cos k\omega t + c_5 \sin k\omega t,$ där k är ett litet heltal.

Om du inte av residualbilden inser vilket det är, kan du pröva dig fram experimentellt. Rita även nu kurvresultat och residual enligt ovan. Felkvadratsumman och nationaldagssoltiden ska anges!

Namn: ....

4. **Hitta bästa cirkel till givna punkter**

Sex punkter är givna: $(-2, 2)$, $(-1, 5)$, $(2, 4)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 1)$. och vi vill finna den bäst anpassande cirkeln.
Lös med minstakvadratmetoden det överbestämda ekvationssystem som erhålls då cirkelns ekvation skrivs enligt MÖ 12: $c_1 + c_2x + c_3y = x^2 + y^2$.
Härled (med papper och penna) denna linjära formel ur cirkelns vanliga ekvation och ange uttrycket för radien (*redovisas!*). Rita upp punkterna och cirkeln.

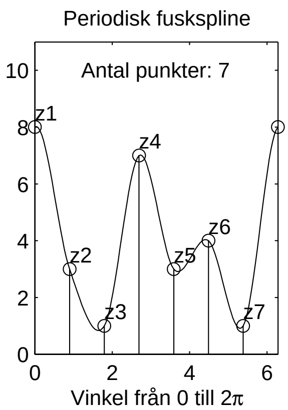
Uppgift 3 och 4 godkända (datum, lärarsign): ....

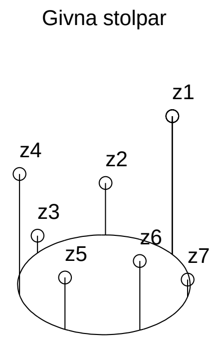
5. **Unika interpolationskurvor**

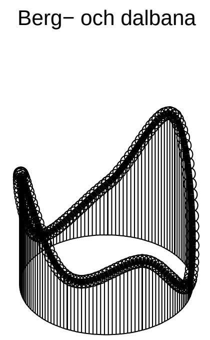
Låt vektorn **z** utgöras av de tio siffrorna i ditt personnummer adderade med ett så att $1 \leq z_i \leq 10$, och låt **x** innehålla talen 0, 2, 4,..., 18.

a) Lägg ett interpolationspolynom genom alla punkterna (x_i, z_i), $i = 1, ..., 10$. Använd `stem(x,z)` för markering av punkterna och rita kurvan med fint steg i intervallet $0 \leq x \leq 18$. Eftersom personnumret är unikt blir din polynomkurva mycket personlig. Svänger den kraftigt — vad kallas fenomenet — eller är du en lugnare natur?

b) *Berg- och dalbana.*
Till n givna data (v_i, z_i) (vinklar resp höjdvärden) ska du konstruera en periodisk fusksplinekurva. Vinkelvärdena är $v_1 = 0$, $v_2 = \delta v$, $\ldots$, $v_n = (n-1)\delta v$ med $\delta v = 2\pi/n$. Låt z-värdena utgöras av de n första z_i-värdena ovan.
Periodiciteten innebär att funktionsvärde och lutning vid vinkeln 0 ska återkomma vid 2π. Handrita en figur och tänk dig för så att du inte hamnar i en fälla när du skriver algoritmen!
Välj n-värde mellan 6 och 10 och beräkna och rita de n kurvstyckena mellan 0 och 2π enligt vänstra figuren.







Placera stolparna runt en cirkel med radien R (t ex $R = 8$) med hjälp av `stem3(R*cos(v), R*sin(v), z)`
Utnyttja fusksplinesresultatet för att åstadkomma din egen berg-och dalbana. Redovisa banor med olika n-värden!

Namn: ....

6. **Ett mekaniskt statikproblem**

Följande problem är hämtat från statiken: En homogen stång AB med längden a och massan m är vridbar i ett vertikalplan kring en axel i A. En lina är fäst i B och lagd över en liten trissa C. Linan bär upp en kula med massan km. Punkterna A, B och C ligger i ett vertikalplan. Linjen AC är horisontell och sträckan $AC = 2a$. Jämviktsvinkeln BAC, dvs vinkeln φ mellan stången och den horisontella linjen AC ges då av följande ekvation:

$$4k \sin(\varphi) - \cos(\varphi)\sqrt{5 - 4\cos(\varphi)} = 0$$

Skriv ett Matlabprogram som beräknar hur φ varierar med k. Gör detta genom att lösa ekvationen för $k = 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 1, 2, 3, \ldots, 10$. Du kan använda Newtons metod eller sekantmetoden. Ledning: Skriv först ett program som beräknar jämviktsvinkeln för ett k-värde, säg $k = 1$. När det programmet fungerar, utöka Matlabkoden så att alla jämviktsvinklar bestäms för alla k-värden.

Rita ett diagram jämviktsvinkeln som funktion av k. Grafen ska ha 1) rubrik, 2) markering utefter koordinataxlarna vilken variabel som axeln representerar (φ eller k) samt 3) koordinatnät (grid).

Uppgift 5 och 6 godkänd (datum, lärarsign): ....

Laboration 1 redovisad och helt klar! Datum: ....

Godkänd av ....