 Namn: ....

LABORATION 2

Tillförlitlighet, integraler, ekvationer, differentialekvationer

Vid redovisningen ska båda i laborationsgruppen kunna redogöra för teori, algoritmer och resultat! Var väl förberedda så att varje delredovisning går snabbt och smidigt (kurvor utskrivna, numeriska resultat noterade – gärna handskrivna i marginalen på detta papper). Sista dag för bonuspoäng: 19/3.

1. **Numerisk integration**

a) *Rotationssymmetrisk lur*

Konturen för en rotationssymmetrisk lur definieras av funktionskurvan

$$y(x) = e^{-x/3}/(2 - \cos \pi x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Luren uppstår genom att kurvan roteras kring x-axeln och rotationsvolymen är $V = \pi \int_0^L y^2\,dx$. Vi önskar beräkna volymen för en lur med längden $L = 2$. Börja med trapetsregeln med steglängderna 0.1 och 0.05 och extrapolera en gång så att simpsonvärdet erhålls. Hur många siffror verkar tillförlitliga?
Pröva sedan MATLABs `quad` med standardtolerans (gör `help quad`).

En fin tredimensionell lurbild gör man så här: Låt x och f vara kolumnvektorer för konturkurvan $y(x)$. Skapa en radvektor för rotationsvinkeln $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ med lagom steg, t ex $2\pi/30$. Bilda matriser X, Y och Z:

```
X=x*ones(size(fi)); Y=f*cos(fi); Z=f*sin(fi);
```

Skriv `mesh(X,Y,Z)` som ger en nätfigur eller `surf(X,Y,Z)` som ger en fylld 3D-figur.

b) *Periodiskt — trapetsregeln utan extrapolation!*

Givet är den periodiska funktionen $f(t)$ som ska integreras över en period:

$$f(t) = \frac{e^{\cos(\pi t/2)}}{2 + \sin \pi t + 0.5 \cos(\pi t/2)}, \quad I = \int_0^T f(t)\,dt$$

Vad är perioden T? Rita upp integrandkurvan över ett par perioder.
Integralvärdet önskas med mycket stor noggrannhet. Trapetsregeln är bästa metod för integration av periodiska funktioner då intervallet är en hel period[1].
Beräkna integralen med trapetsregeln med $n = 20$ och 40. Betrakta resultaten och fortsätt att fördubbla och studera hur snabbt integralapproximationerna uppnår datorprecision (med osäkerhet först i fjortonde eller femtonde siffran). Vid vilket n-värde har det nåtts och vad blir integralvärdet?

Uppgift 1 godkänd (datum, lärarsign): ....

[1] Enligt Euler-Maclaurins summationsformel.

Namn: ....

2. **Ellipsens omkrets på olika sätt**

   För en ellips med halvaxlarna a och b bestäms omkretsen av uttrycket

   $$Omkrets = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 v}\, dv.$$

   Integrandfunktionen är periodisk. Vad är perioden?
   Låt $a = 10$ och beräkna omkretsen med mycket stor noggrannhet[2] för fyra ellipser med följande värden på halva lillaxeln: $b = 7, 5, 3, 1$.
   Rita upp ellipserna; använd parameterformen som för en ellips med centrum i $(x_c,\, y_c)$ och halvaxlarna a och b lyder

   $$x_{\text{ellips}}(\varphi) = x_c + a\cos\varphi,\ y_{\text{ellips}}(\varphi) = y_c + b\sin\varphi,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

   Den indiske självlärde matematikern Srinivasa Ramanujan (1887–1920) föreslog följande approximativa formel för ellipsens omkrets:

   $$O_{Ramanujan} = \pi(a+b)\left(1 + \frac{3c}{10 + \sqrt{4 - 3c}}\right) \quad \text{där} \ \ c = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

   Hur bra är den? Beräkna avvikelsen mellan integralvärdet och ramanujanvärdet i de fyra fallen.

   Uppgift 2 godkänd (datum, lärarsign): ....

3. **Skärning mellan ellipser, ickelinjärt ekvationssystem**

   Beräkna alla skärningspunkter mellan den sneda ellipsen som definieras av $0.4x^2 + y^2 - xy = 10$ och den ellips med centrum i $(4, 2)$ och halvaxlarna $a = 4$ och $b = 6$ (parallella med koordinataxlarna) som beskrivs av

   $$(x-4)^2/a^2 + (y-2)^2/b^2 = 1.$$

   Ellipserna ska ritas[3] och de erhållna skärningspunkterna markeras med en ring. Hur är det med egenskapen kvadratisk konvergens i din algoritm.

   Uppgift 3 godkänd (datum, lärarsign): ....

[2] Metod enligt uppgift 1b!
[3] Den sneda ellipsen skrivs bäst i polär form inför uppritningen.

Namn: ....

4. **Bästa cirkelanpassning, ickelinjär modell**

   Vi vill anpassa en cirkel till punkterna (1.1, 0.7), (1.5, 1.9), (2.2, 3.1), (3.2, 3.0), (4.5, 2.3), (4.8, 1.0), nu med cirkeln skriven på formen $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2 = R^2$. Det leder till ett överbestämt ickelinjärt ekvationssystem. Använd Gauss-Newtons metod för lösningen.
   Skriv i varje iteration ut värdet på det uttryck som minimeras i Gauss-Newtons metod. Rita upp de givna punkterna och den bästa cirkeln.

Uppgift 4 godkänd (datum, lärarsign): ....

5. **Differentialekvationer — begynnelsevärdesproblem**

   a) *Lurig ODE*

   Givet är differentialekvationsproblemet

$$y'' + \pi y\, e^{x/3}\,(2y' \sin \pi x + \pi y \cos \pi x) - y/9 = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1/3.$$

   Inför nya variabler $u_1 = y$ och $u_2 = y'$ så att differentialekvationen kan skrivas till ett system av två första ordningens ODE. Utnyttja MATLABs `ode45` för numerisk lösning fram till $x = 2$. Använd en relativ tolerans på 10^{-6}.
   Rita upp lösningskurvan och jämför den med lurkonturen i uppgift 1.

   Om man utöver u_1 och u_2 inför u_3 med egenskapen $du_3/dx = \pi y^2 = \pi u_1^2$, med $u_3(0) = 0$, så får systemet tre första ordningens differentialekvationer.
   Vilken innebörd har den nytillkomna ekvationen? Lös med `ode45` med toleransen ovan och skriv ut det numeriska värdet av u_3 vid $x = 2$. Verkar det bekant? Förklara den geometriska innebörden av resultatet.

Namn: ....

b) *Duffings ekvation* (frivillig uppgift)

Duffings ekvation är en andra ordningens differentialekvation

$$x'' = a\cos t + x - x^3 - bx', \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1,$$

där a och b är konstanter. Utnyttja MATLABs `ode45` med relativ tolerans 10^{-6} för att beräkna och rita lösningskurvan $x(t)$ fram till $t = 24$ för fallet $a = 7.5$ och $b = 0.15$.

Pröva Eulers metod med steget $\delta t = 0.002$ på Duffings ekvation och rita upp kurvresultatet i samma figur som ovan. Det spårar ur efter ett tag, när då? Kolla om Eulers metod med $\delta t = 0.001$ ger väsentlig förbättring.

En steghalvering till leder till oacceptabelt lång beräkningstid, men gör det om du har tålamod.

Uppgift 5 godkänd (datum, lärarsign): ....

6. **Differentialekvationer — randvärdesproblem**

Använd finitadifferensmetoden för att bestämma lösningskurvan i intervallet $0 \le t \le 4$ till randvärdesproblemet

$$y'' - t\,y' + e^{-t/2}y = t\,\cos t, \quad y(0) = 0,\ y(4) = 0.8.$$

Redovisa på papper hur ekvationssystemet kommer att se ut.
I MATLAB-koden ska du först pröva $N = 10$ delintervall. Fördubbla successivt upp till $N = 80$ (eventuellt längre). Rita de erhållna resultaten i samma figur.

Uppgift 6 godkänd (datum, lärarsign): ....

Laboration 2 redovisad och helt klar! Datum: ....

Godkänd av ....