CSC, NADA, KTH

Lösning till DN1240 Numeriska Metoder Gk 2k
Den 17/12 2008

P1. Inför $\mathbf{w}_k = (x, y, z)^T$ och skriv

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 15x + y - z^2 - 30 \\ -x + 30y - z - 30 \\ -x^2 + y + 100z - 20 \end{pmatrix} = 0$$

Newtons metod lyder

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mathbf{d}_n \quad \text{där} \quad J(\mathbf{w}_n)\mathbf{d}_n = -\mathbf{F}(\mathbf{w}_n)$$

med $J(\mathbf{w}_n)$ Jakobianen till $\mathbf{F}(\mathbf{w})$, dvs

$$J(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 15 & 1 & -2z \\ -1 & 30 & -1 \\ -2x & 1 & 100 \end{pmatrix}$$

Det linjära ekvationssystem som skall lösas i den första iterationen med Newtons metod är

$$J(\mathbf{w}_0)\mathbf{d}_0 = -\mathbf{F}(\mathbf{w}_0) \quad \text{där} \quad \mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

Startgissningen har vi fått genom att anta att x, y och z är små, så vi kan ersätta första ekvationen med $15x = 30$, andra ekvationen med $30y = 30$, och sista ekvationen med $100z = 20$.

Med siffervärdena insatta får vi

$$J(\mathbf{w}_0) = \begin{pmatrix} 15 & 1 & -0.4 \\ -1 & 30 & -1 \\ -4 & 1 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}_0) = \begin{pmatrix} 1 - 0.04 \\ -2 - 0.2 \\ -4 + 1 \end{pmatrix}$$

```
w=[2; 1; 0.2]; dw=w;
iter =0;
while norm(dz,inf)>1.E-9 && iter <10
  x=w(1); y=w(2); z=w(3);
  F=[15*x+y-z^2-30; -x+30*y-z-30; -x^2+y+100*z -20];
  J=[15  1  -2*z; -1  30  -1; -2*x  1  100];
  dw=-J\F;
  disp([w F dw])
  w=w+dw; iter=iter+1;
end
w
```

Felet skattas med normen av den sista korrektionen `dw`.

P2. Vi beräknar skillnaden mellan I-värdena för $h = 0.2$ och $h = 0.1$ till 0.07015 och skillnaden mellan I-värdena för $h = 0.1$ och $h = 0.05$ till 0.0087594. Kvoten mellan 7000 och 876 blir ca 8. Steglängden halveras så kvoten skall vara 2^p, vilket medför att noggrannhetsordningen $p = 3$.

P3 Inför $y_1 = u, y_2 = u', y_3 = v, y_4 = v'$ så får vi systemet

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_2, \\ sin(t) - y_3^2 y_1 \\ y_4 \\ sin(2t) - y_1^2 y_3 \end{pmatrix}$$

Vi skriver en Matlabfunktion för högerledet

```
function dydt=fun3(t,y);
dydt= [y(2)
       sin(t)-y(3)^2*y(1)
       y(4)
       sin(2*t)-y(1)^2*y(3)];
```

Huvudprogrammet blir

```
  [T Up]=ode45(@fun3,[0 2], [1;0.2;-0.2;0.5]);
  plot(T,Up(:,[1 3]));
  Up(end,[1 3])
end
```

Modifikation: Lägg till en femte komponent i fun3

```
 y(1)^2+y(3)^2
```

och utöka startvektorn med en femte komponent som är 0. Utskriften ändras till `Up(end,[1 3 5])`

P4 För $h = 1$ får vi följande diskretisering av området

```
0    1/4   1/2   3/4    1
|-----|-----|-----|-----|
t     t     t     t     t
 0     1     2     3     4

y     y     y     y     y
 0     1     2     3     4
```

I differentialekvationen diskretiserar vi d^2u/dt^2 och du/dt med centraldifferenser och kan ställa upp approximationer i de inre punkterna t_1, t_2, t_3, t_4. Detta ger med $h = 1/4$.

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + 2\frac{y_2 - y_0}{2h} y_1^2 + 2y_1 = 0$$

$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} + 2\frac{y_3 - y_1}{2h}y_2^2 + 2y_2 = 0$$
$$\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{h^2} + 2\frac{y_4 - y_2}{2h}y_3^2 + 2y_3 = 0$$

Till detta kommer randvillkoren

$$y_0 = 2, \quad y_4 = alfa$$

samt integralvillkoret diskretiserat med trapetsregeln

$$h(0.5y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 0.5y_4^2) - alpha^2 = 0$$

Detta är ett icke-linjärt ekvationssystem med sex obekanta, $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, alpha$ och sex ekvationer. Vi kan enkelt eliminera y_0 och $alpha$ och få ett system med 4 ekvationer för 4 obekanta.