

## DN12- 12,14,15,40,41,43 Tentamen i Numeriska metoder gk

Onsdag 09-01-12, kl 10-13

**DEL 2** Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

- (12p) 1. Inför lämpliga beteckningar och formulera Newtons metod för följande problem.

$$2e^{x-y} = 2.01 - 2y, \quad e^{x+y} = 0.99 + x \quad (*)$$

Motivera varför  $x = 0, y = 0$  är en bra startgissning. Formulera det linjära ekvationssystem som skall lösas i den första iterationen. Uttryck med siffrvärden och lös ekvationssystemet. Skissera därefter en algoritm, gärna i form av ett Matlabprogram som löser (\*) med Newtons metod, och med fel mindre än  $10^{-6}$  i varje komponent av lösningen. Bägge komponenterna och deras korrekationer ska skrivas ut.

- (6p) 2. En funktion  $f(x)$  är given i form av en tabell  $(x_i, f(x_i)), i = 1, 2, \dots, n$

Tabellsteget  $h = x_{i+1} - x_i$  är konstant. Vi önskar beräkna approximativa derivatavärden  $f'(x_i), i = 1, 2, \dots, n$ . Ange lämpliga approximationsformler som ger dessa derivatavärden för samtliga  $x_i$ -värden. Ange även vilken noggrannhetsordning formelerna har .

- (21p) 3. Givet följande differentialekvationer

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} = -g + kx, \quad \frac{dx}{dt} = py \quad (**)$$

som tillsammans med villkoren "då tiden  $t = 0$  så gäller  $x = 0, y = 1, dy/dt = 0$ " beskriver en partikels bana i  $xy$ -planet. Följande parametervärden gäller:  $m = 1, c = 0.1, g = 10, k = 0.1$  och  $p = 2$ .

- (6) a) Skriv om dessa ekvationer som ett system av första ordningens differentialekvationer. Ange även begynnelsevillkoren!  
(En enklare uppgift erhålles om  $p = 0$ . För max 3p, lös uppgiften för detta enklare differentialekvationsproblem)
- (10) b) Formulera en algoritm, gärna i form av ett Matlabprogram som löser differentialekvationen på tidsintervallet  $[0, 8]$ .  
Plotta lösningen  $y(t)$ , dvs  $y$  som funktion v  $t$ .  
Plotta även  $y(x)$ , dvs  $y$  som funktion av  $x$ .  
(Även här får du lösa det enklare problemet, men det ger maximalt 5p.)
- (5) c) De två differentialekvationerna (\*\*) kan ersättas med EN differentialekvation, vilken ger lösningen  $y(x)$  direkt, utan att gå via tiden  $t$ . Formulera denna differentialekvation (som kommer att bli av andra ordningen och innehålla derivatatermer  $d^2 y/dx^2$  och  $dy/dx$ ) samt dess begynnelsevillkor. Skriv om som ett system av första ordningen och formulera en algoritm gärna i form av ett Matlabprogram som löser problemet och sedan plottar  $y(x)$ .

(11p) 4. Givet följande randvärdesproblem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

- (3) a) Inför lämpliga beteckningar och ställ upp en differensapproximation som kan användas för att lösa problemet.
- (8) b) Välj steglängden  $h = 0.2$ . Ställ upp det linjära ekvationssystem som erhålles då differensmetoden i a) används. Hur många ekvationer erhålls? Har matrisen i ekvationssystemet någon egenskap som kan utnyttjas för att lösa ekvationssystemet med färre operationer i Gausseliminationen?