

OH till Föreläsning 4, Numme O1, 120131

GKN Kap 4.1D & 4.2C-1 Linjära Minstakvadratmetoden, (MKV)

Lösning saknas?

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 6 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \iff Ac = b$$

Använder vi bara ekvation 1 och 2 får vi $x = 4$ och $y = 1$ vilket inte stämmer i ekvation 3. Använder vi istället ekvation 1 och 3 får vi $x = 3$ och $y = 2$ vilket inte stämmer i ekvation 2. Båda sätten ger $\|r\|_2 = 1$.

$$r = b - Ac = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r = b - Ac = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hitta en lösning så att normen av felet minimeras. Hitta c så att $\|r\|_2$ minimeras.

Minimum fås då derivatan av $\|r\|_2^2$ med avseende på c är noll.

$$\|r\|_2^2 = r^T r = (b - Ac)^T (b - Ac) = b^T b + c^T A^T A c - 2c^T A^T b$$

$$\frac{\partial \left\{ \|r\|_2^2 \right\}}{\partial c} = 2A^T A c - 2A^T b = 0 \implies A^T A c = A^T b$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \quad A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$$c = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} \quad r = b - Ac = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6.5 \\ 6.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\|r\|_2 = \sqrt{0^2 + (-0.5)^2 + 0.5^2} = 1/\sqrt{2} \approx 0.7071$$

När vi hittar en lösning så att kvadraten på normen av residualen minimeras har vi "löst problemet" med **minsta-kvadrat-metoden**.

Anpassa en rät linje till givna mätdata, $p(x) = kx + m$

x	y
1	1
2	4
4	5
5	7

$$\begin{cases} kx_1 + m = y_1 \\ kx_2 + m = y_2 \\ kx_3 + m = y_3 \\ kx_4 + m = y_4 \end{cases} \iff \begin{cases} k \cdot 1 + m = 1 \\ k \cdot 2 + m = 4 \\ k \cdot 4 + m = 5 \\ k \cdot 5 + m = 7 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad c = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \quad A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 17 \end{pmatrix} \implies c = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 0.35 \end{pmatrix}$$

$$\text{Koll1 : } r = b - Ac = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.3 \\ 0.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.65 \\ 2.95 \\ 5.55 \\ 6.85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.65 \\ 1.05 \\ -0.55 \\ 0.15 \end{pmatrix}$$

$$\text{Koll2 : } A^T r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.65 \\ 1.05 \\ -0.55 \\ 0.15 \end{pmatrix} = 10^{-13} \cdot \begin{pmatrix} -0.1288 \\ -0.0400 \end{pmatrix}$$

Anpassa ett andragradspolynom till givna mätdata, $p(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$

x	y
1	1
2	4
4	5
5	7

$$\begin{cases} c_1 + c_2 x_1 + c_3 x_1^2 = y_1 \\ c_1 + c_2 x_2 + c_3 x_2^2 = y_2 \\ c_1 + c_2 x_3 + c_3 x_3^2 = y_3 \\ c_1 + c_2 x_4 + c_3 x_4^2 = y_4 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1^2 = 1 \\ c_1 + c_2 \cdot 2 + c_3 \cdot 2^2 = 4 \\ c_1 + c_2 \cdot 4 + c_3 \cdot 4^2 = 5 \\ c_1 + c_2 \cdot 5 + c_3 \cdot 5^2 = 7 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 46 \\ 12 & 46 & 198 \\ 46 & 198 & 898 \end{pmatrix} \quad A^T b = \begin{pmatrix} 17 \\ 64 \\ 272 \end{pmatrix} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} -0.7333 \\ 2.3000 \\ -0.1667 \end{pmatrix} \Rightarrow r = b - Ac = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.8 \\ -0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T r = 10^{-13} \begin{pmatrix} 0.0400 \\ 0.1643 \\ 0.7860 \end{pmatrix}$$

Tre parametrar innebär tre basfunktioner:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 \\ \varphi_2(x) = x \\ \varphi_3(x) = x^2 \end{cases} \Rightarrow p(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + c_3 \varphi_3(x) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Andragradspolynom med bättre basfunktioner (centrerade)

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha_1 \phi_1(x) + \alpha_2 \phi_2(x) + \alpha_3 \phi_3(x) = \\ \begin{cases} \phi_1(x) = 1 \\ \phi_2(x) = x - 3 \\ \phi_3(x) = (x - 3)^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{aligned} &= \alpha_1 + \alpha_2 (x - 3) + \alpha_3 (x - 3)^2 = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 (x - 3) + \alpha_3 (x^2 - 6x + 9) = \\ &= (\alpha_1 - 3\alpha_2 + 9\alpha_3) + (\alpha_2 - 6\alpha_3)x + \alpha_3 x^2 \\ &= c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \end{aligned} \iff \begin{cases} c_1 = \alpha_1 - 3\alpha_2 + 9\alpha_3 \\ c_2 = \alpha_2 - 6\alpha_3 \\ c_3 = \alpha_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Samma typ av funktion ty samma beroende av x ! Bestäm α_i med MKV och beräkna sedan därur de ursprungliga parametrarna c_i .

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \phi_1(x) & \phi_2(x) & \phi_3(x) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ 1 & x - 3 & (x - 3)^2 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - 3 & (1 - 3)^2 \\ 1 & 2 - 3 & (2 - 3)^2 \\ 1 & 4 - 3 & (4 - 3)^2 \\ 1 & 5 - 3 & (5 - 3)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \quad A^T b = \begin{pmatrix} 17 \\ 13 \\ 41 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \begin{pmatrix} 4.6667 \\ 1.3000 \\ -0.1667 \end{pmatrix} \Rightarrow r = b - A\alpha = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.8 \\ -0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T r = 10^{-14} \begin{pmatrix} -0.0444 \\ -0.0888 \\ -0.7105 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 = \alpha_1 - 3\alpha_2 + 9\alpha_3 = -0.7333 \\ c_2 = \alpha_2 - 6\alpha_3 = 2.3000 \\ c_3 = \alpha_3 = -0.1667 \end{cases} \quad \begin{aligned} \kappa(A^T A_\varphi) &= 9.24 \cdot 10^3 = 10^{3.97} \\ \kappa(A^T A_\phi) &= 3.81 \cdot 10^1 = 10^{1.58} \end{aligned}$$

Vilka omskrivningar är tillåtna?

Omskrivningen skall resultera i en funktion som har samma beroende av den oberoende variabeln som den ursprungliga. De "nya" parametrarna skall vara konstanter och inte bero av någon variabel.

$$\begin{aligned} \text{Ex1 : } \quad y &= c_1 + c_2 x + c_3 x^2 = \alpha_1 + \alpha_2 (x - m) + \alpha_3 (x - m)^2 \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 (x - m) + \alpha_3 (x^2 - 2mx + m^2) \\ &= \{\alpha_1 - m\alpha_2 + m^2\alpha_3\} + \{\alpha_2 - 2m\alpha_3\}x + \{\alpha_3\}x^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = \alpha_1 - m\alpha_2 + m^2\alpha_3 \\ c_2 = \alpha_2 - 2m\alpha_3 \\ c_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ex2 : } \quad y &= c_1 + c_2 \cos(x + c_3) = c_1 + c_2 (\cos x \cos c_3 - \sin x \sin c_3) \\ &= c_1 + \{c_2 \cos c_3\} \cos x + \{-c_2 \sin c_3\} \sin x \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \sin x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = c_1 \\ \alpha_2 = c_2 \cos c_3 \\ \alpha_3 = -c_2 \sin c_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ex3 : } \quad y &= c_1 + c_2 x^2 \neq \alpha_1 + \alpha_2 (x - m)^2 \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 (x^2 - 2mx + m^2) \\ &= \{\alpha_1 + m^2\alpha_2\} + \{\alpha_2\}x^2 + \{-2m\alpha_2\}x \quad \Rightarrow \quad \{x\text{-termen är fel!}\} \end{aligned}$$

$$\text{Ex4 : } \quad y = c_1 + \frac{c_2}{x} = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{x - m} \quad \text{OK?}$$

Ickelinjär modell, (GKN 4.2C-1, sid 153-154)

I modellen $f(x) = c_1 e^{c_2 x}$ förekommer inte de sökta parametrarna c_i linjärt. Ett sätt att hitta en MKV-lösning är då att linearisera modellen:

$$y = c_1 e^{c_2 x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln(c_1 e^{c_2 x}) = \ln c_1 + \ln(e^{c_2 x}) = \ln c_1 + c_2 x = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

Sökta parametrar blir då α_i , basfunktionerna är $\phi_1(x) = 1$ och $\phi_2(x) = x$ och högerledet är $b = \ln y$.

x	y
1	1
2	4
4	5
5	7

$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ 1 & x \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \ln 1 \\ \ln 4 \\ \ln 5 \\ \ln 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 46 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 4.9416 \\ 18.9399 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{pmatrix} 9.2145 \cdot 10^{-4} \\ 4.1150 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \ln c_1 \\ \alpha_2 = c_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = e^{\alpha_1} = 1.0009 \\ c_2 = \alpha_2 = 0.4115 \end{cases}$$

Vi har nu egentligen två olika sätt att beräkna residualen. Dels i det lineariserade problemet, dels i det ursprungliga. Den residual vi har minimerat är den i det lineariserade problemet.

$$r_\ell = b - A\alpha = \{\ln y\} - \{\alpha_1 + \alpha_2 x\} = \begin{pmatrix} \ln 1 \\ \ln 4 \\ \ln 5 \\ \ln 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.4124 \\ 0.8239 \\ 1.6469 \\ 2.0584 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4124 \\ 0.5624 \\ -0.0375 \\ -0.1125 \end{pmatrix} \quad \|r_\ell\|_2 = 0.7074$$

$$r_u = y - c_1 e^{c_2 x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 e^{c_2 x_1} \\ c_1 e^{c_2 x_2} \\ c_1 e^{c_2 x_3} \\ c_1 e^{c_2 x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.5105 \\ 2.2794 \\ 5.1909 \\ 7.8335 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5105 \\ 1.7206 \\ -0.1909 \\ -0.8335 \end{pmatrix} \quad \|r_u\|_2 = 1.9880$$

Att veta **hur** de skiljer behöver är lite överkurs men det kan ju ändå vara bra att veta **att** de skiljer. Hur man gör för att minimera residualen i det ursprungliga problemet lär vi oss på föreläsning 10 som handlar om ickeinjära ekvationssystem. (Gauss-Newtons metod som vi lär oss då ger oss $c_1 = 1.5381$ och $c_2 = 0.3086$ vilket ger $\|r_u\|_2 = 1.6103$, något bättre!)

Utnyttja residualen!

Residualvektorn är skillnaden mellan det önskade högerledet och det som vår modell ger. Det betyder att om vi kan "se en funktion" i residualen så antyder det att vi har glömt att ta med den i modellen och att vår modell skulle stämma bättre överens med mätdata om vi tog med den nya funktionen i modellen.

