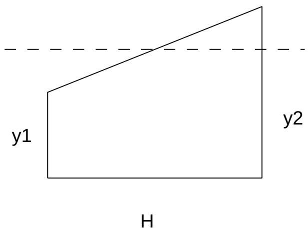
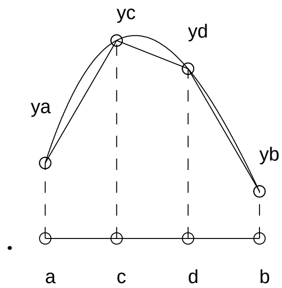
OH till Föreläsning 7, Numme o1, 120213

GNM Kap 6 Integraler & 8:3C Richardsonextrapolation





$$A = H\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) = H\left\{\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2\right\}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \left\{\frac{h}{2}(y_a+y_c) + \frac{h}{2}(y_c+y_d) + \frac{h}{2}(y_d+y_b)\right\}$$
$$= h\left\{\frac{1}{2}y_a + y_c + y_d + \frac{1}{2}y_b\right\}, \quad h = c-a = d-c = b-d$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx T(h) \quad = \quad \textbf{Trapetsregeln}$$

$$T(h) = h\left\{\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(b-h) + \frac{1}{2}f(b)\right\}$$

$$E_{trunk,T(h)} = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T(h)\right| = c_1\,h^2 + c_2\,h^4 + c_3\,h^6 + \cdots$$

$T(h)$ bra approximation av $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ om "streck-kurvan" liknar $f(x)$.

Praktisk integral-skattning 1:

$svar = T(h)$	Rätt säkert om E_{trunk} minskar med faktor 4
$E_{trunk} = \lvert T(h) - T(2h)\rvert$	när steglängden halveras.

Praktisk fel-skattning vid metod med konstant steg h:

$svar = B(h)$, $E_{trunk} = |B(h) - B(2h)|$ Rätt säkert om $E_{trunk} = c_1\,h^p + \cdots$ och $\dfrac{B(4h)-B(2h)}{B(2h)-B(h)} \approx 2^p$

Fast då kan man (oftast) få ett bättre svar med Richardsonextrapolation! För trapetsregeln gäller

$$I = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$T(h) = I + c_1\,h^2 + c_2\,h^4 + c_3\,h^6 + \cdots$$
$$T(2h) = I + c_1\,(2h)^2 + c_2\,(2h)^4 + c_3\,(2h)^6 + \cdots = I + 4\,c_1\,h^2 + 16\,c_2\,h^4 + 64\,c_3\,h^6 + \cdots$$
$$4T(h) - T(2h) = 3\,I + 0\,h^2 - 12\,c_2\,h^4 - 60\,c_3\,h^6 + \cdots$$
$$\frac{(4T(h)-T(2h))}{3} = I + 0\,h^2 - 4\,c_2\,h^4 - 20\,c_3\,h^6 + \cdots$$
$$\hat{T}(h) \stackrel{\triangle}{=} T(h) + \frac{(T(h)-T(2h))}{3} = I + \tilde{c}_1\,h^4 + \tilde{c}_2\,h^6 + \cdots$$
$$E_{trunk,\hat{T}(h)} = \tilde{c}_1\,h^4 + \tilde{c}_2\,h^6 + \cdots$$

Om $h < 1$ så är $h^4 \ll h^2$ dvs troligen ett mycket mindre trunkeringsfel. Men inte säkert! Om trunkeringsfelet i $T(h)$ inte dominerades av $c_1\, h^2$ utan av $c_2\, h^4$ så har felet blivit cirka fyra gånger större i $\hat{T}(h)$ än det var i $T(h)$. Man måste alltså kolla vad som dominerar trunkeringsfelet och sedan eliminera den termen. Om $E_{trunk}(2h)/E_{trunk}(h) \approx 2^p$ så vet man att termen $c_p\, h^p$ dominerar och bör elimineras i första hand:

Richardson-extrapolering: $\hat{B}(h)$ har ett mindre trunkeringsfel än $B(h)$ om

$$\hat{B}(h) = B(h) + \frac{B(h) - B(Qh)}{Q^p - 1} \qquad \text{och} \qquad \frac{B(Q^2h) - B(Qh)}{B(Qh) - B(h)} \approx Q^p$$

Trunkeringsfelet i $\hat{B}(h)$ kan skattas med $E_{trunk} = \left|\hat{B}(h) - \hat{B}(Qh)\right|$

$$E_{trunk,T(h)} = c_1\, h^2 + c_2\, h^4 + \cdots \;\Rightarrow\; \hat{T}(h) = T(h) + \frac{(T(h) - T(2h))}{3} \;\Rightarrow\; E_{trunk,\hat{T}(h)} = \tilde{c}_1\, h^4 + \tilde{c}_2\, h^6 + \cdots$$

$$h^4 \;\Rightarrow\; 2^4 - 1 = 15 \;\Rightarrow\; \hat{\hat{T}}(h) = \hat{T}(h) + \frac{\left(\hat{T}(h) - \hat{T}(2h)\right)}{15} \;\Rightarrow\; E_{trunk,\hat{\hat{T}}(h)} = \tilde{\tilde{c}}_1\, h^6 + \tilde{\tilde{c}}_2\, h^8 + \cdots$$

Praktisk integral-skattning 2:

$$svar = \hat{T}(h)$$
$$E_{trunk} = \left|\hat{T}(h) - \hat{T}(2h)\right|$$
$$\text{Rätt säkert om } \frac{T(4h) - T(2h)}{T(2h) - T(h)} \approx 4$$

Praktisk integral-skattning 3:

$$svar = \hat{\hat{T}}(h)$$
$$E_{trunk} = \left|\hat{\hat{T}}(h) - \hat{\hat{T}}(2h)\right|$$
$$\text{Rätt säkert om } \frac{\hat{T}(4h) - \hat{T}(2h)}{\hat{T}(2h) - \hat{T}(h)} \approx 16$$

```
% INTEGRANDFIL
function y=funk(x);
y=


% EN TRAPETSREGEL

a=   ; b=   ; n=   ;
h=(b-a)/n;
x=a:h:b;
y=funk(x);
trapets=h*(sum(y)-(y(1)+y(length(y)))/2)
plot(x,y)
```

.

.

```
% KOLL AV LAGOM ANTAL DELAR
a=   ; b=   ; n=   ;
m=400;
h=(b-a)n;     hh=(b-a)/m;
x=a+h*[0:n]; xx=a+hh*[0:m];
y=funk(x);    yy=funk(xx);
plot(xx,yy,x,y,x,y,'o')
```

```
% FLERA TRAPETSER
a=   ; b=   ; n=   ;
t=0;
for i=1:4;
  h=(b-a)/n;
  x=a+h*[0:n];
  y=funk(x);
  t(i)=h*(sum(y)-(y(1)+y(n+1)))/2);
  n=2*n;
end;
t=t'
```

• Trapetsregeln • Inte trapetsmetoden! • Richardson-extrapolation • Förbehandling • Uppdelning • Kapning • Variabelsubstitution • Partiell integration • `quad` • `quad8` • `quadl` • Adaptiv steglängd

Exempel 1: Numerisk integration med trapetsregeln med $f(x) = 100x^5$, $a = 0.1$ och $b = 0.5$:

$$\int_{0.1}^{0.5} 100\,x^5\,\mathrm{d}x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=1 \;\Rightarrow\; h=0.4 \;\Rightarrow\; T(0.4) = 0.4\left\{\frac{1}{2}f(0.1)+\frac{1}{2}f(0.5)\right\} = 0.6252 \\ n=2 \;\Rightarrow\; h=0.2 \;\Rightarrow\; T(0.2) = 0.2\left\{\frac{1}{2}f(0.1)+f(0.3)+\frac{1}{2}f(0.5)\right\} = 0.3612 \\ n=4 \;\Rightarrow\; h=0.1 \;\Rightarrow\; T(0.1) = 0.1\left\{\frac{1}{2}f(0.1)+f(0.2)+f(0.3)+f(0.4)+\frac{1}{2}f(0.5)\right\} = 0.2862 \end{array}\right.$$

Utan Richardsonextrapolation skulle vi välja $T(0.1)$. $E_{trunk} = |T(0.1) - T(0.2)| = |0.2862 - 0.3612| = 0.0750$. $E_{pres} = |0.286 - 0.2862| = 0.0002$ vilket ger slutsvaret 0.286 ± 0.076.

Richardsonextrapolation för hand gör man lättast i en tabell:

h	$T(h)$	Δ	$\Delta/3$	$\hat{T}(h)$	Δ		
0.4	0.6252						
0.2	0.3612	-0.2640	-0.0880	0.2732			
0.1	0.2862	-0.0750	-0.0250	0.2612	-0.0120		

Innan vi vågar tro på resultatet gör vi två kontroller:
1. Skillnaderna mellan värdena för olika h (dvs Δ-värdena på en rad) skall minska när vi extrapolerar.
2. Δ-värdena i en kolumn skall avta på regelbundet sätt.

Ja, skillnaderna minskar och vi kan kolla kvoten i den första Δ-kolumnen: $(-0.2640)/(-0.0750) = 3.52$ Ja det stämmer, skall avta med ungefär faktorn 4. Vi väljer att svara med $\hat{T}(h) = 0.2612$ med skattningen av trunkeringsfelet till $E_{trunk} = |0.2612 - 0.2732| = 0.0120$ (dvs slutsvar 0.261 ± 0.013). Integralen kan beräknas analytiskt, det exakta svaret är 0.2604 som ju ligger inom det angivna intervallet, alltså en korrekt skattning.

Matlab har färdiga rutiner för integralberäkning. Då anger man bara funktionsfilens namn, vilket intervall man har och vilken noggrannhet man önskar:

```
% Med Matlabs inbyggda:

a=   ; b=   ; tol=     ;
intq=quad('funk',a,b,tol)
Etrunk=tol
```

```
% Med Matlabs inbyggda

a=   ; b=   ; tol=       ;
intq8=quad8('funk',a,b,tol)
Etrunk=tol*abs(intq8)
```

Exempel 3: Ett exempel när förbehandling krävs:

$$\int_0^{1000} \frac{1}{(x-5)^8 + 0.001}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \int_0^{1000} = \int_0^{10} + \int_{10}^{1000}$$

```
function y=funk(x);
y=1./((x-5).^8+0.001);
```

```
tol=1e-6;
inte=quad8('funk',0,1000,tol)
Einte=tol*abs(inte)
```

```
tol=1e-6;
int1=quad8('funk',0,10,tol);
int2=quad8('funk',10,1000,tol);
int=int1+int2
Eint=tol*abs(int)
```

Man får $inte = 864.5587$ och $Einte = 8.6456 \cdot 10^{-4}$ dvs man tror man har två säkra decimaler, men integralen med fyra korrekta decimaler är 865.4664 Den inbyggda rutinen har givit ett resultat vi inte skall tro på. (Relativa felet är $|864.5587 - 865.4664|/865.4664 = 0.9077/865.4664 = 0.0010 \gg 1 \cdot 10^{-6}$) Detta beror inte på något fel i Matlab-rutinen utan på att integranden/integralen är för krånglig! Med uppdelningen får vi $int = 865.4664$ och $Eint = 8.6547 \cdot 10^{-4}$. Ett resultat som är korrekt. Det är just för att veta när/hur man kan använda de färdiga rutinerna som vi måste förstå grunderna i de numeriska metoden.

De förbehandlingar vi gör är:
- Uppdelning
- Kapning
- Substitution
- Partiell integration

Exempel 4 : Beräkna $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^6+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ med fyra säkra decimaler

Dela upp integralen i två delar, delningspunkten kallar vi B:

$$I_1 = \int_0^B \frac{1}{x^6+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \text{som vanligt, blir enkelt } T_1 \pm E_{T_1} \text{ när man vet } B$$

Andra delintegralen gör vi en (grov) överskattning av, då vet vi hur mycket fel vi gör om vi skulle "ignorera" den, dvs kapa bort den:

$$I_2 = \int_B^{\infty} \frac{1}{x^6+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \le \int_B^{\infty} \frac{1}{x^6}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{5x^5}\right]_B^{\infty} = \frac{1}{5B^5} \quad \Longrightarrow \quad E_{kap} \le \left|\frac{1}{5B^5}\right|$$

Om $B = 10$ så är $E_{kap} \le \frac{1}{5\cdot 10^5} = 0.2\cdot 10^{-5}$ vilket ryms inom önskad felgräns. Om jag sedan beräknar den första delintegralen med ett fel mindre än $0.3\cdot 10^{-5}$ blir summan av felen mindre än $0.5\cdot 10^{-5}$ och jag har t.o.m. fem säkra decimaler. Integralens värde skattas alltså till $T_1 \pm (E_{T_1} + E_{kap}) = T_1 \pm \left(E_{T_1} + |\frac{1}{5B^5}|\right)$

```
function y=funk4(x);
y=1./(x.^6+(cos(x)).^2);
```

```
tol=1e-6; B=10;
i1=quad8('funk4',0,B,tol);
E1=tol*abs(i1);
Ekap=1/(5*B^5);
svar=i1
felgrans=E1+Ekap
```

```
x=0:0.02:10;
y=funk4(x);
plot(x,y)
title('Ex4')
```

Exempel 5 : Följande integral är svår för trapetsregeln $I = \int_0^{0.5} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ty $x = 0$ ger division med noll.

Problemet kan undvikas på flera sätt, tex **substitution:**

$$\text{Sätt } \begin{cases} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 0.5 \Rightarrow t = \sqrt{0.5} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad I = \int_0^{\sqrt{0.5}} \frac{\cos(t^2)}{t}\,2t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{0.5}} 2\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$$

Nu kan integralen kan lätt skattas med trapetsregeln.

En annan lösning är att använda **partiell integration:**

$$I = \int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\cdot\cos(x)\right]_0^{0.5} - \int_0^{0.5} 2\sqrt{x}\cdot(-\sin(x))\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\cos(0.5) + 2\int_0^{0.5}\sqrt{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Den nya integralen kan lätt skattas med trapetsregeln.

Exempel 6: $\int_{10^{-4}}^{10^4} \frac{1}{x^6}\,\mathrm{d}x$

```
FUNKTIONSFIL:
function y=funk6(x);
y=x.^(-6);

HUVUDPROGRAM:
a=1e-4; b=1e4;
iq=quad('funk6',a,b)
iq8=quad8('funk6',a,b)
iqL=quadl('funk6',a,b)
tot=0; t=a;
for i=1:8;
   tot=tot+quad8('funk6',t,10*t);
   t=10*t;
end;
tot
ratt=1/(5*a^5)-1/(5*b^5)
```

```
RESULTERAR I:
Recursion level limit level reached in ...
Singularity likely.

iq   = 1.970538812834528e+19
iq8  = 1.703386777498760e+23
iqL  = 2.262852103986580e+19
tot  = 2.000000007930776e+19
ratt = 2.000000000000000e+19

% Direktanropet av quad/quad8/quadl gav fel svar.
% Men vi varnades i samtliga fall!
% Med uppdelning i delar som blir 'snalla' far vi
% ratt svar (skillnaden till ratta svaret ar mindre
% an begard tolerans)!
```

$E_{tab,\ T(h)} \le (b-a)\cdot E_{tab,\ f(x)}$ $\quad E_{tab,\ Romberg(h)} \equiv E_{tab,\ T(h)}$ $\quad (E_{tab,\ Rich(h)} \le 8.26\cdot E_{tab,\ B(h)})$

Lösning till tabellen i Exempel 1:

$$\int_{0.1}^{0.5} 100\, x^5 \,\mathrm{d}x$$

h	$T(h)$	Δ	$\Delta/3$	$\hat{T}(h)$	Δ	$\Delta/15$	$\hat{\hat{T}}(h)$
0.4	0.6252						
0.2	0.3612	−0.2640	−0.0880	0.2732			
0.1	0.2862	−0.0750	−0.0250	0.2612	−0.0120	−0.0008	0.2604
0.05	0.2669	−0.0193	−0.0064	0.2605	−0.0007	−0.0000	0.2605

kvot 3.52 resp 3.89 kvot 17.14

Eftersom alla värden (mellanresultat) avrundats till fyra decimaler stör beräkningsfelet fjärde decimalen. Med fler siffror i räkningarna får jag:

h	$T(h)$	Δ	$\Delta/3$	$\hat{T}(h)$	Δ	$\Delta/15$	$\hat{\hat{T}}(h)$
0.4	0.625200						
0.2	0.361200	−0.264000	−0.088000	0.273200			
0.1	0.286200	−0.075000	−0.025000	0.261200	−0.012000	−0.000800	0.260400
0.05	0.266888	−0.019312	−0.006437	0.260451	−0.000749	−0.000050	0.260401

Ånyo ser vi att sista siffrorna är påverkade av beräkningsfelet. (Jag har avrundat alla mellanresultat till sex decimaler, så sjätte decimalen i svaret är inte att lita på. Kom ihåg tumregeln att räkna med minst två extra siffror.) Jag svarar 0.2604 med fyra decimaler. Detta innebär ju $E_{tot} = 0.00005$ och jag ser att trunkeringsfelet och och beräkningsfelet ligger också kring sjätte decimalen dvs långt under den gräns jag svarar med.