OH till Föreläsning 8, Numme o1, 120215

GKN Kap 6.1-6.2. Differentialekvationer (GNM kap 7.1-7.2)

Dagens termer
• Riktningsfält • Standardform • Begynnelsevärdesproblem • Lokal linearisering • Eulers metod
• Grafisk tolkning av Euler • Runge-Kuttas metod • Richardson-extrapolation • Metodens ordning
• DE:s ordning • System av DE av första ordningen • Lokalt trunkeringsfel • Globalt trunkeringsfel
• Adaptiv steglängd • `odEul` • `odRK` • `ode23` • `ode45`

Standardform, GKN sid 201 (GNM sid (7)3): $y' = f(x, y) \quad y(a) = c$

Exempel 1: Skatta $y(0.2)$ då $y' = 1 + x - y$ och $y(0) = 1$.

Allmän idé $y(x_i) \approx y_i$ och $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \cdot \widetilde{\{y'_n\}} \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$ med $\begin{cases} y_0 = c \\ x_0 = a \end{cases}$

Eulers metod GKN sid 212, GNM sid (7)9 $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$ med $\begin{cases} y_0 = c \\ x_0 = a \end{cases}$

I exempel 1 har vi $y' = f(x, y) = 1 + x - y$. Först provar jag $h = 0.2$ vilket innebär steg:

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_0 + h\{1 + x_0 - y_0\} = 1 + 0.2\{1 + 0 - 1\} = 1 \\ x_1 = x_0 + h = 0 + 0.2 = 0.2 \end{cases}$$

Sedan provar jag $h = 0.1$ vilket innebär steg:

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_0 + h\{1 + x_0 - y_0\} \\ \quad = 1 + 0.1\{1 + 0 - 1\} = 1 \\ x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = y_1 + h\{1 + x_1 - y_1\} \\ \quad = 1 + 0.1\{1 + 0.1 - 1\} = 1.01 \\ x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2 \end{cases}$$

Sedan provar jag $h = 0.05$ vilket innebär steg:

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_0 + h\{1 + x_0 - y_0\} = \\ \quad = 1 + 0.05\{1 + 0 - 1\} = 1 \\ x_1 = x_0 + h = 0 + 0.05 = 0.05 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = y_1 + h\{1 + x_1 - y_1\} = \\ \quad = 1 + 0.05\{1 + 0.05 - 1\} = 1.0025 \\ x_2 = x_1 + h = 0.05 + 0.05 = 0.10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = y_2 + h\{1 + x_2 - y_2\} = \\ \quad = 1 + 0.05\{1 + 0.10 - 1.0025\} = 1.007375 \\ x_3 = x_2 + h = 0.10 + 0.05 = 0.15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_4 = y_3 + h\{1 + x_3 - y_3\} = \\ \quad = 1.01450625 \\ x_4 = x_3 + h = 0.15 + 0.05 = 0.20 \end{cases}$$

Valt värde för $y(0.2)$ blir 1.01450625. Jag skattar $E_{trunk} = |1.01450625 - 1.01| = 0.00450625$. Inga mellanresultat har avrundats så $E_{ber} = 0$. Jag svarar med fyra decimaler, $E_{pres} = |1.0145 - 1.01450625| = 0.00000625$. Ger felgränsen $0.00450625 + 0.00000625 = 0.0045125$ och slutsvaret $y(0.2) = 1.0145 \pm 0.0046$

Trunkeringsfelet i Eulers metod är $c_1 h + c_2 h^2 + \cdots$. Med halverat steg skall alltså E_{trunk} avta en faktor 2^1:

$$\frac{y(0.2, h = 0.2) - y(0.2, h = 0.1)}{y(0.2, h = 0.1) - y(0.2, h = 0.05)} = \frac{(1 - 1.01)}{(1.01 - 1.01450625)} = 2.22 \approx 2, \qquad \text{OK! Vi tror på vår skattning!}$$

($y(0.2)$ med fyra korrekta decimaler är 1.0187 som ju ligger i det angivna intervallet!)
(Med Richardson-extrapolation på Euler-siffrorna ovan får vi 1.0190 ± 0.0010, se tabell på nästnästa sida)

Metoden är av ordning p om $y(x;h)-y(x) \approx c\,h^p$ där c inte beror av h (men väl av x, y och f)(GKNs211)
Euler är av ordning 1 $\Rightarrow$ E_{trunk} avtar med faktor $2^1 = 2$ när steget halveras.
Runge-Kutta är av ordning 4 $\Rightarrow$ E_{trunk} avtar med faktor $2^4 = 16$ när steget halveras.

Runge– **–Kuttas** **metod** GKN s 219 GNM (7)14	$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$	där	$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x_n, y_n) \\ k_2 = h \cdot f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_1}{2}) \\ k_3 = h \cdot f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_2}{2}) \\ k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \end{cases}$	med	$\begin{cases} y_0 = c \\ x_0 = a \end{cases}$

Trots att den ser jobbigare ut så krävs totalt mindre arbete med RK än Euler om man önskar en viss noggrannhet.
Runge-Kuttas metod med steget $h = 0.2$ på exempel 1 ger $x_1 = 0.2$ och $y(0.2) \approx y_1$ och

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = h \cdot f\left(x_0, y_0\right) = h\left\{1 + x_0 - y_0\right\} = 0.2\left\{1 + 0 - 1\right\} = 0 \\ k_2 = h \cdot f\left(x_0 + \dfrac{h}{2}, y_0 + \dfrac{k_1}{2}\right) = h\left\{1 + \left(x_0 + \dfrac{h}{2}\right) - \left(y_0 + \dfrac{k_1}{2}\right)\right\} = 0.2\left\{1 + 0.1 - 1\right\} = 0.02 \\ k_3 = h \cdot f\left(x_0 + \dfrac{h}{2}, y_0 + \dfrac{k_2}{2}\right) = h\left\{1 + \left(x_0 + \dfrac{h}{2}\right) - \left(y_0 + \dfrac{k_2}{2}\right)\right\} = 0.2\left\{1 + 0.1 - 1.01\right\} = 0.018 \\ k_4 = h \cdot f\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right) = h\left\{1 + (x_0 + h) - (y_0 + k_3)\right\} = 0.2\left\{1 + 0.2 - 1.018\right\} = 0.0364 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_0 + \dfrac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = 1.018733333 \\ x_1 = x_0 + h = 0 + 0.2 = 0.2 \end{cases}$$

Runge-Kuttas metod med steget $h = 0.1$ på exempel 1 ger $0.2 = x_2$ och $y(0.2) \approx y_2$ (vi startar förstås med $x_0 = 0$ och $y_0 = 1$)

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f\left(x_0, y_0\right) = h\left\{1 + x_0 - y_0\right\} = 0.1\left\{1 + 0 - 1\right\} = 0 \\ k_2 = h \cdot f\left(x_0 + \dfrac{h}{2}, y_0 + \dfrac{k_1}{2}\right) = h\left\{1 + \left(x_0 + \dfrac{h}{2}\right) - \left(y_0 + \dfrac{k_1}{2}\right)\right\} = 0.1\left\{1 + 0.05 - 1\right\} = 0.005 \\ k_3 = h \cdot f\left(x_0 + \dfrac{h}{2}, y_0 + \dfrac{k_2}{2}\right) = h\left\{1 + \left(x_0 + \dfrac{h}{2}\right) - \left(y_0 + \dfrac{k_2}{2}\right)\right\} = 0.1\left\{1 + 0.05 - 1.0025\right\} = 0.00475 \\ k_4 = h \cdot f\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right) = h\left\{1 + (x_0 + h) - (y_0 + k_3)\right\} = 0.1\left\{1 + 0.1 - 1.00475\right\} = 0.009525 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_0 + \dfrac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = 1.0048375 \\ x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f\left(x_1, y_1\right) = h\left\{1 + x_1 - y_1\right\} = 0.1\left\{1 + 0.1 - 1.0048375\right\} = 0.00951625 \\ k_2 = h \cdot f\left(x_1 + \dfrac{h}{2}, y_1 + \dfrac{k_1}{2}\right) = h\left\{1 + \left(x_1 + \dfrac{h}{2}\right) - \left(y_1 + \dfrac{k_1}{2}\right)\right\} = 0.1\left\{1 + 0.15 - 1.009595625\right\} = 0.014040438 \\ k_3 = h \cdot f\left(x_1 + \dfrac{h}{2}, y_1 + \dfrac{k_2}{2}\right) = h\left\{1 + \left(x_1 + \dfrac{h}{2}\right) - \left(y_1 + \dfrac{k_2}{2}\right)\right\} = 0.1\left\{1 + 0.15 - 1.011857719\right\} = 0.013814228 \\ k_4 = h \cdot f\left(x_1 + h, y_1 + k_3\right) = h\left\{1 + (x_1 + h) - (y_1 + k_3)\right\} = 0.1\left\{1 + 0.20 - 1.018651728\right\} = 0.018134827 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2 = y_1 + \dfrac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = 1.018730901 \\ x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2 \end{cases}$$

Den rimlighetskontroll man kan göra är att k_2 och k_3 bör vara någorlunda lika och att skillnaden mellan k_1 och k_2 är ungefär som skillnaden mellan k_3 och k_4.
Vi kan redan nu skatta $y(0.2)$-värdet till 1.01873 (med fem säkra decimaler, ty $E_{trunk} = 2.432 \cdot 10^{-6}$ och $E_{pres} = 9.01 \cdot 10^{-7}$ och $E_{ber} \sim 10^{-9}$ (avr till 9 decim) vilket ger $E_{trunk} + E_{pres} + E_{ber} < 0.5 \cdot 10^{-5}$).

Eftersom både Euler och RK arbetar med konstant steg och har en trunkeringsfelutveckling av typen $E_{trunk} = c_1 h^p + c_2 h^{p+1} + c_3 h^{p+2} + \cdots$ så kan man förbättra resultatet ytterligare med Richardson-extrapolation.

n	y_{Eul}	Δ	$\hat{y}_{Eul}$	Δ	$\Delta/3$	$\hat{\hat{y}}_{Eul}$
1	1.000000000	-	-	-	-	-
2	1.010000000	0.010000000	1.020000000	-	-	-
4	1.014506250	0.004506250	1.019012500	-0.000987500	-0.000329167	1.018683333
8	1.016651804	0.002145554	1.018797358	-0.000215142	-0.000071714	1.018725644
16	1.017699381	0.001047577	1.018746958	-0.000050400	-0.000016800	1.018730158
32	1.018217065	0.000517684	1.018734749	-0.000012209	-0.000004070	1.018730679

n	h	y_{RK}	Δ	$\Delta/$	$\hat{y}_{RK}$
1	0.2	1.018733333	-	-	-
2	0.1	1.018730901	-0.000002432	-0.000000162	1.018730739
4	0.05	1.018730762	-0.000000139	-0.000000009	1.018730753
8	0.025	1.018730754	-0.000000008	-0.000000001	1.018730753

Vi ser att även om man tar hänsyn till att varje steg i RK är fyra gånger så jobbigt som ett Euler-steg så lönar sig Runge-Kutta. RK-värdet med $n = 4$ motsvarar i arbete Eulervärdet med $n = 16$, men RK-värdet är mycket bättre. Inte ens ett stegs Richardson-extrapolation hjälper (tvärtom).

```
function yprim=dydx(x,y);
yprim=1+x-y;

x0=0; xslut=0.2; y0=1;   n=8;
[xx,yy]=odEul('dydx',x0,xslut,y0,n);
m=length(xx);
yslut=yy(m)
plot(xx,yy)
```

```
x0=0; xslut=0.2; y0=1;   n=8;
h=(xslut-x0)/n; x=x0; y=y0; xx=x0; yy=y0;
for i=1:n;
   yprim=dydx(x,y);
   y=y+h*yprim;
   x=x+h;
   xx=[xx;x]; yy=[yy;y];
end;
yslut=y
plot(xx,yy);
```

```
yvek=[]; for n=[1 2 4 8 16 32]; euler; yvek=[yvek; yslut]; end; yvek  % n bortkomm
yvek=[]; n=1; for j=1:6; euler; yvek=[yvek; yslut]; n=2*n; end; yvek  % n bortkomm
```

```
x0=0; xslut=0.2; y0=1;
tolval=odeset('RelTol',1e-6);
[xut,yut]=ode45('dydx',[x0,xslut],y0,tolval);
n=length(xut);
yslut=yut(n);
plot(xut,yut)

tolval2=odeset('RelTol',1e-9);
[xut2,yut2]=ode45('dydx',[x0,xslut],y0,tolval2);
m=length(xut2);
yslut2=yut2(m);
if m~=n; etrunk=abs(yslut-yslut2),end;
valt=yslut2
```

```
tol=1e-6;
[xut,yut]=ode45('dydx',x0,xslut,y0,tol);

tol2=tol/1000;
[xut2,yut2]=ode45('dydx',x0,xslut,y0,tol2);
```

System av första ordningens differentialekvationer

Standardform för system, GKN sid 202, GNM sid (7)3 : $\begin{cases} y' = f(x,y,z) \\ z' = g(x,y,z) \end{cases}$ $\begin{cases} y(a) = c \\ z(a) = d \end{cases}$

Exempel 2

$$\begin{aligned} y' &= 3x - yz \\ z' &= 2yx \end{aligned} \quad \text{med} \quad \begin{aligned} y(0.5) &= 1.2 \\ z(0.5) &= 2.3 \end{aligned} \quad \text{sökt} \quad z(1.3)$$

Eulers metod GNM sid (7)13 $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = z_n + h \cdot g(x_n, y_n, z_n) \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$ med $\begin{cases} y_0 = c \\ z_0 = d \\ x_0 = a \end{cases}$

```
function uprim=dudx(x,u);
uprim=[3*x-u(1)*u(2)
       2*u(1)*x];


x0=    y0=    z0=    xslut=    n=
u0=[y0 z0];
[xut,uut]=odEul('dudx',x0,xslut,u0,n);
zut=uut(:,2);
plot(xut,zut)
```

```
x0=   y0=   z0=   xslut=   n=
h=(xslut-x0)/n;
x=x0; y=y0; z=z0;
xx=x0; yy=y0; zz=z0;
for i=1:n;
  uprim=dudx(x,[y z]);
  x=x+h;
  y=y+h*uprim(1);
  z=z+h*uprim(2);
  xx=[xx;x];yy=[yy;y];zz=[zz;z];
end;
plot(xx,zz)
```

```
x0=  y0=  z0=  xslut=
h=(xslut-x0)/n;
x=x0; u0=[y0;z0]; u=u0;
xx=x0; uu=u0';
for i=1:n;
  uprim=dudx(x,u);
  x=x+h;
  u=u+h*uprim;
  xx=[xx;x];uu=[uu;u'];
end;
zz=uu(:,2);
plot(xx,zz)
```

Trunkeringsfelet skattas som vanligt genom en jämförelse med motsvarande beräkning med dubbla steglängden. Regelbundenheten i trunkeringsfelet skattas som vanligt och Richardsonextrapolering fungerar utmärkt eftersom både Euler och Runge-Kutta är metoder med konstant steg och har ett trunkeringsfel av typen $E_{trunk} = c_1\, h^p + c_2\, h^{p+1} + \dots$

Man brukar föra in alla beroende variabler i en vektor, vilket ger oss standardformen för system:

$$\text{Inför } \begin{cases} u_1 = y \\ u_2 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' = \{y\}' = y' = 3x - yz = 3x - u_1u_2 \\ u_2' = \{z\}' = z' = 2yx = 2u_1x \end{cases} \text{ dvs } \begin{cases} u_1' = 3x - u_1u_2 \\ u_2' = 2u_1x \end{cases}$$

Standardform för system, GKN sid 202/GNM sid (7)3 : $\bar{u}' = \bar{f}(x, \bar{u}) \quad \bar{u}(a) = \bar{c}$

Eulers metod GNM sid (7)13 $\begin{cases} \bar{u}_{n+1} = \bar{u}_n + h \cdot \bar{f}(x_n, \bar{u}_n) \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$ med $\begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{c} \\ x_0 = a \end{cases}$

I Exempel 2 ovan blir således $x_0 = 0.5, y_0 = 1.2$ och $z_0 = 2.3$ alternativt $x_0 = 0.5, u_{10} = 1.2$ och $u_{20} = 2.3$.

Alla högre ordningens DE kan skrivas om till ett system av första ordningens DE. GKNs202/GNM (7)4.

$$y''' = 5xy' - e^y + 2x - \cos(4y'') \;\Rightarrow\; \text{inför } \begin{cases} u_1 = y \\ u_2 = y' \\ u_3 = y'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' = \{y\}' = y' = u_2 \\ u_2' = \{y'\}' = y'' = u_3 \\ u_3' = \{y''\}' = y''' = 5x\, u_2 - e^{u_1} + 2x - \cos(4\, u_3) \end{cases}$$

Samma teknik gäller vid system av högre ordning:

$$\begin{cases} y''' = 8 - yz + x^2y' \\ y'' = \dfrac{z''}{xz} \end{cases} \Rightarrow \text{ inför } \begin{cases} u_1 = y \\ u_2 = y' \\ u_3 = y'' \\ u_4 = z \\ u_5 = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' = \{y\}' = y' = u_2 \\ u_2' = \{y'\}' = y'' = u_3 \\ u_3' = \{y''\}' = y''' = 8 - yz + x^2y' = 8 - u_1\, u_4 + x^2\, u_2 \\ u_4' = \{z\}' = z' = u_5 \\ u_5' = \{z'\}' = z'' = xzy'' = x\, u_4\, u_3 \end{cases}$$

Om exakta lösningen är känslig för små störningar i indata är problemet illakonditionerat eller instabilt.
Om den numeriska metoden ger stora ändringar i lösningen vid små störningar är metoden instabil (kan gälla även om själva DE är stabil).