 Namn, pers.nr: ....

LABORATION 2 - upg 4 saknas

Integraler, ekvationer, differentialekvationer

Vid redovisningen ska båda i laborationsgruppen kunna redogöra för teori, algoritmer och resultat! Var väl förberedda så att varje delredovisning går snabbt och smidigt (kurvor utskrivna, numeriska resultat noterade – gärna handskrivna i marginalen på detta papper). Sista dag för bonuspoäng: se hemsidan.

1. **Numerisk integration: rotationssymmetrisk lur**

   Konturen för en rotationssymmetrisk lur definieras av funktionskurvan

   $$y(x) = e^{-x/3}/(2 - \cos \pi x), \quad 0 \le x \le L.$$

   Luren uppstår genom att kurvan roteras kring x-axeln och rotationsvolymen är $V = \pi \int_0^L y^2 \, dx$. Vi önskar beräkna volymen för en lur med längden $L = 2.5$. Börja med trapetsregeln med några olika steglängder. Följ gärna upp med Richardson-extrapolation. Hur många siffror verkar tillförlitliga? Ange din beräknade volym med felgräns.
   Pröva sedan MATLABs `quad` med standardtolerans (gör `help quad`).

   En fin tredimensionell lurbild gör man så här: Låt x och f vara kolumnvektorer för konturkurvan $y(x)$. Skapa en radvektor `fi` för rotationsvinkeln $0 \le \varphi \le 2\pi$ med lagom steg, t ex $2\pi/30$. Bilda matriser X, Y och Z:

   ```
   X=x*ones(size(fi)); Y=f*cos(fi); Z=f*sin(fi);
   ```

   Skriv `mesh(X,Y,Z)` som ger en nätfigur eller `surf(X,Y,Z)` som ger en fylld 3D-figur.

2. **Integral med förbehandling**. Integralen

   $$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx$$

   ska beräknas numeriskt med totalt fel mindre än 10^{-6}. Genomför först en analytisk förbehandling så att det transformerade problemet kan lösas numeriskt.
   Ledning: 1) undersök vilket värde integranden får för $x = 0$
   2) Gör "svanskapning" för att bestämma vilket ändligt intervall $[0, N]$ som behövs för att bidraget från "svansen" ska bli tillräckligt liten.
   Redovisa både integralvärdet och den analytiska förbehandlingen!

Deluppgift 1 och 2 godkända (datum, lärarsign): ....

3. **Differentialekvationer - begynnelsevärdesproblem**

Givet är differentialekvationsproblemet

$$y'' + \pi y\, e^{x/3}\,(2y' \sin \pi x + \pi y \cos \pi x) - y/9 = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1/3.$$

Skriv om differentialekvationen till ett system av första ordningens ODE. Utnyttja MATLABs `ode45` för numerisk lösning fram till $x = 2.5$. Använd en relativ tolerans på 10^{-6}.
Rita upp lösningskurvan och jämför den med lurkonturen i uppgift 1.

Om man utöver det erhållna systemet inför u_3 med egenskapen $du_3/dx = \pi u_1^2$, med $u_3(0) = 0$, så får systemet tre första ordningens differentialekvationer.
Vilken innebörd har den nytillkomna ekvationen, dvs vad svarar u_3 mot? Lös med `ode45` med toleransen ovan och skriv ut det numeriska värdet av u_3 vid $x = 2.5$. Verkar det bekant?
Lös även uppgiften med `ode45`'s inbyggda tolerans 10^{-3}.

4. **Differentialekvationer – Randvärdesproblem**

Följande differentialekvationsproblem beskriver temperaturfördelningen $T(x)$ i en cylindrisk stav av längden L.

$$-\frac{d}{dx}(k\frac{dT}{dx}) = Q(x), \quad T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L \tag{1}$$

Vänster och höger ändpunkt på staven har den konstanta temperaturen T_0 resp T_L. $k(x)$ är stavens värmeledningsförmåga och $Q(x)$ är den värmemängd som per tidsenhet och volymnsenhet genereras i staven, t ex genom radioaktivitet.

Antag att $L = 2$ $[m]$, $T_0 = 300$ $[K]$, $T_L = 400$ $[K]$ samt att $k(x)$ $[J/(K \cdot m \cdot s]$, och $Q(x)$ $[J/(s \cdot m^3)]$ är funktionerna

$$k(x) = 2 + x/4 \qquad Q(x) = 300e^{-(x-\frac{L}{2})^2}, \qquad 0 \le x \le L$$

Differentialekvation och randvillkor (1) kan lösas numeriskt med hjälp av finita differensmetoden. Om vi diskretiserar intervallet $[0, L]$ enligt $x_i = ih, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$, där $h \cdot n = L$, sätter $y(x_i) \approx y_i$ och approximerar andraderivatan med centraldifferens erhålles ett linjärt ekvationssystem

$$AT = b \tag{4}$$

där A är en matris, T är en vektor med temperaturvärden i och b är en vektor som beror av $Q(x_i)$-värdena samt temperaturen i stavens ändpunkter.

a) Skriv ner matrisen A och vektorerna T och b för $n = 4$ med **papper och penna**. Vilken struktur har matrisen A ?

Ledning: $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}$

b) Skriv ett MATLAB-program som löser randvärdesproblemet och räknar ut temperaturen T i punkten $x = 1.5$ med 4 säkra decimaler.

Plotta också temperaturen som funktion av x på hela intervallet $0 \leq x \leq L$.

Tar programmet lång tid att köra? Här är två tips för snabbare program:

Tips1: Matrisen A kommer endast att ha ett fåtal nollskilda element. Kommandot `sparse` är ett kommando för att skapa glesa matriser eller för att tala om för Matlab att matrisen kan lagras glest. MATLAB-satsen `A=sparse(A)` ändrar till gles lagring i Matlab.

Tips2: Hur mycket skall felet minska då steglängden halveras? Gör det det i ditt program?

c) Varför är det lite svårare att med 4 säkra decimaler skatta maximala temperaturen i staven än temperaturen i $x = 1.5$?

d) Frivillig: Skatta maximala temperaturen i staven med 4 säkra decimaler.

5. **Skärning mellan ellipser, ickelinjärt ekvationssystem**

   Beräkna alla skärningspunkter mellan den sneda ellipsen som definieras av

   $$0.4x^2 + y^2 - xy = 12$$

   och den ellips med centrum i (5, 2) och halvaxlarna $a = 4$ och $b = 6$ (parallella med koordinataxlarna) som beskrivs av

   $$(x - 5)^2/a^2 + (y - 2)^2/b^2 = 1.$$

   Ellipserna ska ritas. (Den sneda ellipsen kan skrivas i polär form inför uppritningen.) De erhållna skärningspunkterna markeras med en ring. Hur är det med egenskapen kvadratisk konvergens i din algoritm? Skriv ut tabell som visar kvadratisk konvergens.

Laboration 2 redovisad och helt klar! Datum: ....

Godkänd av: ....

Namn: ....