

## Projektsamling med Lab3-uppgifter

---

- 3B.1 Varpan — gotländsk kastsport
- 3B.2 Metallröret — het vätska i rör
- \*3B.4 Futten — rymdskeppet illa ute
- \*3B.5 Strömkretsen — elektriskt svängningsförlopp
- \*\*3B.7 Partikeln — bana i elektromagnetiskt fält
- 3B.10 Nalle-Maja — bamsedotter gungar och hoppar långt
- 3B.11 Naturen — växter, möss och ormar
- \*3B.13 Vindkastet — bollkast i sidvind
- \*3B.14 Flödespaketet — partikelflöde förbi en cylinder

Tvåstjärnig uppgift klassas som svår och utförs av den som strävar efter högre betyg. Uppgift med en stjärna klassas som svår eller lätt beroende på om man gör utvidgningen eller avstår från den.

### 3B.1: Varpan

I varpaspel kastar man en flat sten och det gäller att träffa en målsticka som är nedsatt i marken tjugo meter bort. Kaströrelsen beskrivs av differentialekvationerna

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k_x \frac{dx}{dt} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -9.81 - k_y \left| \frac{dy}{dt} \right| \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

där varpastenens luftmotståndskonstant i  $x$ - resp  $y$ -led är  $k_x = 0.020$ ,  $k_y = 0.065$ . Stenen kastas med hastigheten 19.0 m/s från 1.50 meters höjd.

Varpans nedslagspunkt beror av kastvinkeln  $\alpha$ . Ett kast simuleras genom att man anger en kastvinkel och löser differentialekvationerna med Runge-Kuttas metod tills varpan tar mark (t o m hamnar nedanför marknivån  $y = 0$ ). Interpolera fram tidpunkt och  $x$ -koordinat för nedslagspunkten.

Problemet att bestämma vilken kastvinkel som ger vinnande varpakast med nedslag inom 1 cm från målstickan utgör ett ekvationslösningssproblem. Skriv en effektiv algoritm som beräknar kastvinkeln och rita upp kastbanan. Tänk på att två lösningar finns till varpaproblemet — en hög och en låg bana.

Diskutera (med hjälp av numeriska experiment) hur de numeriska metoderna och andra eventuella osäkerheter påverkar tillförlitligheten i vinkelresultatet.

Interpolera sedan i de ovan erhållna och lagrade kastbanevärdena (vektorer för  $t$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ) för att åstadkomma en tabell där kashöjden skrivs ut för varje meter i  $x$ -led. För att beräkna tidpunkten då  $x$  antar ett visst värde duger linjär interpolation (om det inte är alltför glest mellan värdena). För beräkning av  $y$  vid denna tidpunkt är hermiteinterpolation särskilt lämplig eftersom  $\dot{y}$ -värden finns tillgängliga. Rita upp detta resultat också med markering av varpans höjdläge vid varje meter.

#### Kast i motvind

Om man kastar i hård motvind måste luftmotståndskonstanten i  $x$ -led sättas till ett högre värde; samtidigt krävs en högre hastighet vid utkastet för att varpan ska ha möjlighet att nå tjugo meter. Gör egen numerisk simulering av ett eller flera sådana fall och visa bankurvor över vinnande kast i motvind med de data som du valt.

### 3B.2: Metallröret

Genom ett tjockväggigt cylindriskt metallrör strömmar en het vätska med den konstanta temperaturen  $450^\circ\text{C}$ . Cylinderväggen har innerradien 1.0 cm och ytterradien 2.0 cm. Temperaturfördelningen  $u(r)$  i metallen bestäms av differentialekvationen

$$r \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = 0 \quad \text{med } u = 450 \quad \text{vid } r = 1 \quad (\text{längdenhet cm}).$$

Omgivande temperatur är  $20^\circ\text{C}$ . Vid  $r = 2$  är temperaturgradienten  $du/dr$  proportionell mot temperaturdifferensen, d v s där gäller  $du/dr = -K \cdot (u - 20)$ .

$K$  är en materialkonstant, det så kallade värmeöverföringstalet mellan metall och luft. Låt metallen i testfallet ha  $K = 1$ .

Gör enligt finitadifferensmetoden en diskretisering av intervallet  $1 \leq r \leq 2$  indelat i  $N$  delintervall. Visa hur randvärdesproblemet kan approximeras av ett matrisproblem. Lös detta först för  $N = 25$ , fortsätt med successiva fördubblingar av  $N$  tills önskad precision erhålls — t ex fyra korrekta siffror i temperaturvärdet vid cylinderns ytterradie. Rita upp temperaturfördelningen i metallen.

Man tillåter inte att metallcylinderns utsida får bli varmare än  $100^\circ$ . Beräkna vilket som är det kritiska  $K$ -värdet för metallen för att detta ska uppnås.

Undersök även hur känsligt detta kritiska  $K$ -värde är för temperaturvariationer i vätskan. Det inträffar nämligen att vätskan i röret råkar stiga till  $460^\circ\text{C}$  i stället för att hålla det givna temperaturvärdet  $450^\circ\text{C}$ .

(Problemet kan lösas analytiskt, gör gärna det för kontroll.)

Det visar sig att det tjockväggiga röret är tillverkat av ett inhomogent material — värmediffusiviteten i röret har ett radiellt beroende. Temperaturfördelningen  $u(r)$  bestäms nu av

$$r \frac{d^2u}{dr^2} + \left(1 + \frac{rD'(r)}{D(r)}\right) \frac{du}{dr} = 0, \quad 1 \leq r \leq 2.$$

$D(r)$  är ett tredjegradspolynom med derivatan noll vid inner- och ytterradien, alltså vid  $r = 1$  och  $r = 2$ , dessutom gäller  $D(2) = 2D(1)$ .

Begynnelsevillkor och randvillkor är samma som tidigare. Lös samma uppgifter som ovan.

### 3B.4: Rymdskeppet Futten illa ute

Trots att raketmotorn går för fullt förblir Futten hängande orörlig på höjden  $H$  över jordytan. Goda råd är dyra! Kaptenen låter rymdskeppet vrida sig nittio grader från det tidigare vertikala läget, och i fortsättningen verkar raketmotorn horisontellt med oförminskad kraft. Störtar Futten eller klarar sig rymdskeppet ut i rymden?

Newtons rörelseekvationer uttryckta i polära koordinater lyder:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 = G \cos \alpha - g \frac{R^2}{r^2}$$

$$r \frac{d^2 \phi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} = G \sin \alpha$$

där vinkeln  $\alpha$  var noll före vridningen men blir  $90^\circ$  efter kaptenens manöver (vid tiden  $t = 0$  och  $\phi = 0$ ).  $R$  är jordradien,  $g$  är tyngdaccelerationen vid jordytan och  $G$  är tyngdaccelerationen på höjden  $H$  där Futten blev hängande:  $G = gR^2/(R + H)^2$ . Med för vårt problem lämpliga enheter — längdenheten jordradie och tidsenheten timme — gäller  $g = 20.0$  och förstås  $R = 1$ .

Futten befinner sig på några jordradiers höjd ovanför jordytan då kaptenen gör manövern. Undersök vad som händer om starthöjden  $H$  är två jordradier. Beräkna och rita upp raketbanan under så lång tid att det står klart om Futten störtar eller försvinner ut i rymden. Startvärdena till differentialekvationerna ges av det faktum att Futten var helt stilla då kaptenen ändrade banriktning.

Fundera ut en bra algoritm som med god noggrannhet och lämplig form av interpolation beräknar tidpunkten och positionen för banans allra lägsta punkt. Vad blir  $r_{\min}$ -värdet när Futtens starthöjd är två jordradier?

Uppgiften är nu att med en effektiv algoritm räkna fram gränsfallets  $H$ -värde, dvs Futtens starthöjd  $H_{\text{gräns}}$  som leder till en bana utan att katastrofen blir ett faktum. Bestäm hastigheten som Futten sveper förbi jordytan med och rita bankurvan från begynnelseläget till denna plats. Beräkna bankurvans längd, alltså Futtens tillryggalagda sträcka fram till jordpassagen. Gör tillförlitlighetsbedömning av de erhållna resultaten!

Bankurvan har parabelliknande form, eller hur? Bestäm och rita upp den parabel som i minstakvadratmetodens mening bäst anpassar sig till Futtens bana. Beräkna parabelbågens längd och jämför med Futtensträckan ovan.

#### Utvidgning

Om kaptenen vid sin manöver inte lyckas vrida Futten  $90^\circ$  hur mycket påverkar det raketbanan? Gör simuleringar med vridningsvinklarna  $\alpha = 70, 80, 90, \dots, 130^\circ$  och studera hur det kritiska  $H_{\text{gräns}}$ -värdet ändras, likaså hastigheten vid jordpassagen. Rita bankurvorna.

För vilken vridningsvinkel kommer Futten att få maximal hastighet vid jordytan och vad är maxvärdet? Använd en effektiv algoritm för att bestämma detta.

### 3B.5: Strömkretsen

En enkel strömkrets består av en kondensator och en spole. Kondensatorn är uppladdad till spänningen  $U_0$ . Spolen innehåller järn och har strömberoende induktans:  $L = L_0/(1 + I^2)$ . Vid tiden  $t = 0$  sluts kretsen och svängningsförloppet bestäms av två samband:  $U = L \frac{dI}{dt}$  (spänningen över induktansen) och  $I = -C \frac{dU}{dt}$  (strömmen genom kondensatorn).

Visa att följande differentialekvation kan härledas ur uttrycken ovan (efter derivering av första uttrycket):  $d^2 I/dt^2 = 2I (dI/dt)^2/(1 + I^2) - I(1 + I^2)/L_0 C$ .

Vid  $t = 0$  gäller  $I = 0$  och  $dI/dt = U_0/L_0$ . Lösningen  $I(t)$  är en periodisk funktion som är mer eller mindre sinusliknande beroende av hur  $U_0$ -värdet väljs.

Data:  $L_0 = 1.10$  H,  $C = 0.85 \mu\text{F}$ . Pröva fyra värden för  $U_0$ , först 300 V då järnkärnans inflytande är nästan försumbart, därefter 1200, 1800 och 2700 V då strömkurvan inte blir sinuslik längre.

Före den numeriska behandlingen kan det vara bra att bedöma storleksordningen på svängningstiden  $T$ . För en krets med konstant  $C$  och konstant  $L = L_0$  gäller  $T = 2\pi\sqrt{L_0 C}$  (härled det).

Använd lämplig ode-lösare för noggrann beräkning och uppritning av strömkurvorna. Fundera ut effektiva algoritmer för att med god precision bestämma strömmens toppvärde  $I_{\max}$  och för att erhålla svängningstiden  $T$ .

#### Fourieranalys

Programmet ska göra en fourieranalys av strömkurvan, det vill säga beräkna koefficienterna  $a_k$  i fourierutvecklingen av  $I(t)$ :

$$I(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + a_3 \sin 3\omega t + \dots, \text{ där } \omega = 2\pi/T.$$

Att det inte blir några cosinustermer i utvecklingen följer av att funktionen  $I(t)$  är udda.

För fourierkoefficienterna gäller  $a_k = \frac{2}{T} \int_0^T I(t) \sin k\omega t dt$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

Vid valet av numerisk integrationsmetod bör du tänka på att integranden är en periodisk funktion. Beräkna de femton första koefficienterna. När strömmen är nästan sinusformad bör alla koefficienter utom den första vara mycket små, stämmer det?

Det symmetriska utseendet hos strömkurvan gör att vissa fourierkoefficienter är noll (teoretiskt i alla fall). Vilka är det och hur väl stämmer teori och praktik?

Rita i samma figur upp strömkurvan samt resultatet av fourierutvecklingen, dels då bara de tre första termerna tas med, dels då alla femton finns med.

#### Utvidgning

1. Det kommer ett krav att strömmen i kretsen inte får överstiga 10 ampere. Beräkna med en effektiv lösningsmetod det spänningsvärde  $U_0 = U_0^{\text{grans}}$  som ger  $I_{\max} = 10$ .

Man har möjlighet att variera spolens  $L_0$ -värde och vill därför för en krets som uppfyller kravet  $I_{\max} = 10$  undersöka beroendet mellan  $U_0^{\text{grans}}$  och  $L_0$ . Beräkna och markera i ett diagram  $U_0^{\text{grans}}$  för  $L_0 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 2.0$  H.

2. De båda sambanden  $U = L \frac{dI}{dt}$  med  $L = L_0/(1 + I^2)$  och  $I = -C \frac{dU}{dt}$  bildar direkt ett system av två första ordningens ODE för strömmen  $I(t)$  och spänningen  $U(t)$ . Det leder till en alternativ beräkningsmetod för att rita upp ström- och spänningskurvorna och för att bestämma  $I_{\max}$  och svängningstiden  $T$ . Genomför detta för vår svängningskrets (fourieranalysen och utvidgning 1 behöver inte vara med här).

### 3B.7: Partikeln i fältet

Laddade partiklar rör sig med hög hastighet in i ett område där det finns två elektromagnetiska kraftfält. Vid passagen inuti de båda kraftfälten kröks partikelbanorna. Utanför kraftfälten är banorna rätlinjiga.

Fälten finns inom två cirkulära cylindrar båda med radien  $R$  och med axlarna parallella med  $z$ -axeln, mittpunkter vid  $x = a_1$ ,  $y = b_1$  respektive  $x = a_2$ ,  $y = b_2$ . Det elektriska fältet i cylindrarna är  $\mathbf{E} = E(1, 0, 0)$  respektive  $\mathbf{E} = E(-1, 0, 0)$  med konstant fältstyrka  $E$ . Det magnetiska fältet är riktat i  $z$ -led och är starkast i mitten. I första cylindern gäller  $\mathbf{B} = B(0, 0, 1 - w \frac{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2}}{R})$  och i den andra:  $\mathbf{B} = B(0, 0, -(1 - w \frac{\sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2}}{R}))$ .  $w$  är en viktfaktor med ett värde mellan 0 och 0.5.

Om partikelns position vid tiden  $t$  beskrivs med vektorn  $\mathbf{r}(t)$  så gäller följande differentialekvation för partikelrörelsen:  $m\ddot{\mathbf{r}} = Q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$ , där  $m$  är partikelns massa och  $Q$  dess laddning.

Betrakta först rörelsen för *en* partikel. Den har hastigheten  $v_0$  när den kommer farande längs negativa  $x$ -axeln i positiv riktning. Vi börjar studera rörelsen när den passerar origo. Om partikelns hastighetskomponent i  $z$ -led är noll utanför fälten så förblir den noll inuti de ovan beskrivna fälten; partikelbanan blir plan och kan beskrivas med enbart  $x$ - och  $y$ -koordinater. I detta fall erhålls differentialekvationerna

$$\ddot{x} = \frac{Q}{m} \left( E + \left( 1 - w \frac{r_1}{R} \right) B \dot{y} \right), \quad \ddot{y} = -\frac{Q}{m} \left( 1 - w \frac{r_1}{R} \right) B \dot{x}, \quad \text{där}$$
$$r_1 = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2},$$

om partikeln befinner sig i första kraftfältet. Härled dessa uttryck ur kryssproduktformeln ovan. På motsvarande sätt erhålls uttrycken inom andra kraftfältet. Utanför cirkelarna (som cylindrarna nu reducerats till) gäller  $m\ddot{\mathbf{r}} = 0$ , dvs partikelrörelsen blir rätlinjig.

Vår studie gäller elektroner med massan  $m = 9.1091 \cdot 10^{-31}$  kg och negativ laddning  $Q = -1.6021 \cdot 10^{-19}$  C. Hastigheten är  $v_0 = 455 \cdot 10^3$  m/s. Övriga data:  $E = 20.0$  V/m,  $B = 0.92 \cdot 10^{-4}$  Wb/m<sup>2</sup>,  $R = 0.012$  m,  $a_1 = 0.015$ ,  $b_1 = 0$ ,  $a_2 = 0.030$ ,  $b_2 = 0.034$ . Viktfaktor  $w = 0.2$ .

Beräkna elektronens bana från  $x = 0$  tills den med god marginal lämnat den andra cylinderns kraftfält. Utnyttja kunskapen om rätlinjig rörelse utanför kraftfälten (med ekvationslösning för skärning mellan rät linje och cirkel). Använd RK4 för lösning av ode-systemet inuti kraftfälten och utför lämplig interpolation för att erhålla elektronens position precis vid utgången av varje fält. Pröva dig fram till lagom tidssteg som ger acceptabel noggrannhet och motivera det valda steget!

Låt nu tre elektroner alla med hastigheten  $v_0$  i  $x$ -riktningen komma in i parallella banor; startpositioner vid  $t = 0$  är  $x = 0$  och  $y = -0.002, 0, 0.002$ . Beräkna och rita de tre elektronbanorna med samma viktfaktor  $w = 0.2$  som ovan. Efter passagen genom kraftfälten är banorna inte parallella längre. Genom att förflytta det andra fältet i  $y$ -led (alltså ändra  $b_2$ -värdet) kan man åstadkomma att banorna för elektron nr 1 och 3 blir parallella igen. Använd någon effektiv algoritm för att bestämma cylinderplaceringen.

Magnetfältets styrka beror av viktfaktorn  $w$ . Man vill studera hur en ändring av  $w$ -värdet påverkar slutriktningen för de parallella elektronbanorna. Utför beräkningarna för  $w = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ .

### 3B.10: Nalle-Maja gungar

Bamse har satt upp en gunga i en trädgren. Nalle-Maja kan kan sätta sig på gungan alldeles själv och hon lyckas då få gungan att bilda 25 graders vinkel med lodlinjen. I början kan inte Nalle-Maja ge fart själv, utan det blir en dämpad svängningsrörelse där utslagsvinkeln  $u$  beskrivs av differentialekvationen

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{du}{dt} + \frac{g}{L} \sin u = 0.$$

$k = 1.20$  är en dämpande konstant beroende på luftmotstånd och trädgrensfriktion. Nalle-Maja väger tillsammans med gungan  $m = 17$  kg, replängden  $L$  är 2.0 meter, trädgrenen finns 2.5 meter ovanför marken och  $g$  är  $9.81$  m/s<sup>2</sup>.

När Nalle-Maja har gungat fram och tillbaka några gånger inser hon att hon kan öka farten själv genom att luta sig rätt vid vändlägena. På det sättet åstadkoms en plötslig förändring i vinkelhastigheten vid varje  $u_{\max}$  och  $u_{\min}$ . Vid tillräckligt stor sådan hastighetsknyck kan hon gunga högre och högre. Inför lagom stor diskontinuitet i vinkelhastigheten vid gungans vändlägen! Du behöver nog också hjälpa Bamse att sätta en gräns för hur högt hon tillåts gunga!

Nu börjar Nalle-Maja pröva hur långt hon kan hoppa. Hon gungar om och om igen och hoppar av i farten vid olika vinklar. Hur ska hon göra för att komma längst? Under luftfärden gäller differentialekvationerna

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa \frac{dx}{dt} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \kappa \left| \frac{dy}{dt} \right| \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

där  $\kappa = 0.15$  är hennes luftmotståndskoefficient. Hur får man begynnelsevillkoren till detta differentialekvationssystem?

Simulera hela förloppet alltifrån starten med den dämpade svängningen tills Nalle-Maja måste gå hem efter att ha lyckats gunga och åstadkomma det allra längsta hoppet. I algoritmen gäller det att tänka på att nedslaget sker på marknivån  $y = 0$ , det kan krävas lämplig form av interpolation för att bestämma nedslagsplatsen med god precision.

Rita upp Nalle-Majas gungning och hoppbanan från gungan dels i ett testfall då Bamse bara tillåter att Nalle-Maja gungar till en maximal utslagsvinkel på  $60^\circ$ , dels i ett fall där du och Bamse vågar låta henne vara ännu djärvare.



### 3B.11: Naturen — växter, möss och ormar

Vid början av år noll planteras 100 exemplar av en nyttoväxt på en bördig ö. Beståndet utvecklar sig snabbt med tiden enligt  $dV/dt = a_1V - a_2V^2$ , där  $V(t)$  är antalet växter vid tiden  $t$  (tidsenheten är år). Konstanterna är  $a_1 = 16$  och  $a_2 = 1.8 \cdot 10^{-5}$ . Differentialekvationen är analytiskt lösbar (separabel) men kan förstås också lösas numeriskt. Man finner att då  $t$  ökar så närmar sig  $V(t)$  ett konstant slutvärde, vilket?

Låt tidpunkten vara  $T_1$  då antalet växter stigit till 95% av slutvärdet. Ange hur många dagar efter inplanteringen som detta uppnås. Använd RK4 med tidssteget en dag, alltså  $dt = 1/365$ , för att finna dagen. Men prova dessutom om RK4 med tidssteget en vecka (och viss interpolation) leder till samma dag.

Just den dagen anländer två växtätande djur till ön (man kan väl tänka sig ett par möss). Samspelet mellan växterna och djuren kan beskrivas med följande differentialekvationer, där  $S(t)$  betecknar antalet skadedjur:  $dV/dt = a_1V - a_2V^2 - a_3VS$ ,  $dS/dt = -b_1S^{1.4} + b_2V^{0.6}S^{0.8}$ .

I växtekvationen tillkommer termen  $-a_3VS$  som effekt av att skadedjuren dykt upp, konstanten  $a_3 = 0.011$ . Djuren har svårigheter att öka ju fler de är, därav den negativa första termen i  $dS/dt$ , konstanten är  $b_1 = 2.0$ , Djurantalet ökar däremot när de har möjlighet att utnyttja födan; i den positiva andra termen gäller  $b_2 = 0.085$ .

Detta differentialekvationssystem har då  $t$  går mot oändligheten en konstant stabil lösning. Sätt derivatorna lika med noll och lös det ickeinjära system som ger slutvärdena för  $V$  och  $S$ .

Lös differentialekvationerna numeriskt med lämplig metod fram till tidpunkten  $T_2 = 1.5$  (d v s ett och ett halvt år efter växtplanteringen). Har antalet växter och skadedjur hunnit stabilisera sig? Hur många procent (eller promille) avviker deras värden från slutvärdena?

Vid denna tid införs rovdjur (ett ormpar) på ön för att hålla de växtätande mössens antal nere och därmed öka mängden av växter. Man får ett differentialekvationssystem där växtekvationen är oförändrad (ormarna äter inte växterna). Skadedjursekvationen blir nu

$$dS/dt = -b_1S^{1.4} + b_2V^{0.6}S^{0.8} - b_3SR, \quad dR/dt = -c_1R + c_2S\sqrt{R}.$$

Med lämpligt valda värden på konstanterna i modellen gäller även här att  $V$ ,  $S$  och  $R$  för stora  $t$ -värden närmar sig en konstant stabil lösning. Låt  $b_3 = 1.5$ ,  $c_1 = 2.0$  och  $c_2 = 0.025$ . Sätt derivatorna till noll och lös ut slutvärdena för  $V$ ,  $S$  och  $R$ .

Lös differentialekvationssystemet tills tre år gått sedan växterna planterades,  $T_3 = 3$ . Hur nära sina slutvärden har de inblandade parterna nått?

#### Hjälper besprutning?

Öborna som utnyttjar växterna och vill skörda frukterna är ändå inte nöjda — man tycker att skadedjuren äter för mycket. Vid tidpunkten  $T_3$  beslutar man sig för en årlig besprutningskampanj, som är så anpassad att 70 procent av skadedjuren dödas vid varje års besprutning. Effekten är tyvärr sådan att även rovdjursstammen drabbas, 20 procent av rovdjuren dödas samtidigt varje år av giftet.

Lös alltså differentialekvationssystemet med besprutning varje år införd. Efter någon tid har bestånden stabiliserats till nya värden (en periodisk lösning uppstår). Har öborna gjort rätt? Studera växtbeståndet under ett år före och efter besprutningskampanjen.

Hur känslig är denna ekologiska modell för störningar i koefficienterna? Gör några numeriska experiment med små (eller kanske stora) förändringar i någon eller några koefficienter och undersök hur resultatet blir! Experimentera också med andra besprutningsmedel som påverkar skadedjurs- och rovdjursbestånden annorlunda än det först prövade giftet.



### 3B.13: Vindkastet

En april dag med varma sydvindar tränar Pelle bollkast på sportplanen. Han kastar i väg bollen österut med utkastvinkeln (i vertikalplanet)  $35^\circ$ , hastigheten 20 m/s och höjden 1.8 m. Pelle har fötterna i origo i ett koordinatsystem med horisontella  $x$ - och  $y$ -axlar,  $x$  åt öster,  $y$  åt norr (i vindens riktning).

Differentialekvationerna för bollbanan blir

$$\ddot{x} = -q\dot{x}, \quad \ddot{y} = -q(\dot{y} - a(z)), \quad \ddot{z} = -9.81 - q|\dot{z}|, \quad \text{där } q = c\sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y} - a(z))^2 + \dot{z}^2}.$$

Luftmotståndskoefficienten  $c$  beror av bollradien och massan och är för Pelles boll  $c = 0.070$ . Vindstyrkan är 7 m/s vid marken och ökar den här april dagen med höjden enligt:  $a(z) = 7 + 0.35z$ .

Visa hur differentialekvationerna kan skrivas om på vektorform till ett system av första ordningens differentialekvationer och ange startvektorns komponenter. Använd en effektiv algoritm som bestämmer kastbanan tills bollen nått mark och beräknar nedslagsplatsen noggrant. Någon form av interpolation behövs eftersom räkningarna inte ska utföras med onödigt litet tidssteg. Rita kastbanan med matlabs `plot3(x,y,z)`.

Pelle vill att bollen trots vinden ska slå ned rakt österut, alltså på  $x$ -axeln. Hur ska han vända sig i kastögonblicket för att åstadkomma det? Hans utkastvinkel i vertikalplanet är fortfarande  $35^\circ$ . Utöka med en effektiv algoritm för detta.

Pelles boll studsar när den slår ner på marken. Vid studsens blir bollens riktningenskomponenter i  $x$ - och  $y$ -led oförändrade, medan riktningens  $z$ -komponent byter tecken. Lägg på lagom hastighetsminskning, en dämpningsfaktor på 0.80 vid varje studs. Visa en bild över bankurvan för den studsande bollens fem första studsar, då Pelle kastar bollen så att första nedslaget hamnar på  $x$ -axeln.

#### Utvidgning

Nu vill Pelle pröva bollträff mot en liten grej på toppen av en 3.5 meter hög stolpe, 6 m österut och 2 m åt norr, alltså vid  $x_{\text{pryl}} = 6.0$ ,  $y_{\text{pryl}} = 2.0$ ,  $z_{\text{pryl}} = 3.5$ .

Differentialekvationerna är oförändrade (samma boll och samma blåst). Pelle har samma position som förut men han är lite försiktigare, utkasthastigheten är 15 m/s.

Pelles första försök görs med utkastvinkeln  $60^\circ$  i vertikalplanet och vridning  $15^\circ$  medurs (så att näsan pekar ungefär ostsydost). Skriv en algoritm som beräknar bollbanan och med god precision (viss interpolation behövs) anger  $y$ - och  $z$ -koordinaterna när bollen finns vid  $x = x_{\text{pryl}}$ .

Tänk ut en smart algoritm för att hjälpa Pelle att med så få försök som möjligt träffa grejen på stolpen. Det är två villkor att uppfylla vid  $x = x_{\text{pryl}}$  (rätt värden på  $y$  och  $z$ ) och två obekanta vinklar att bestämma, det leder till att ett ickelinjärt ekvationssystem behöver ställas upp och lösas. Gör det!

Rita upp stolpen och Pelles lyckade bollkast som slår ned grejen från stolpen. (Men vad är det för grej?)

### 3B.14: Flödespaketet — partikelflöde förbi en cylinder

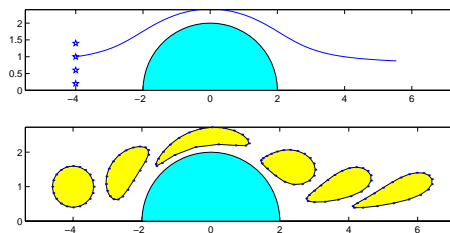
En långsträckt cylinder med radien  $R = 2$  befinner sig i en inkompressibel vätska som strömmar i positiv  $x$ -riktning. Cylinderaxeln ( $x = 0$ ) är vinkelrät mot flödesriktningen. Det hela kan betraktas som ett 2D-problem. Flödespartikelns läge  $(x(t), y(t))$  vid tiden  $t$  bestäms av startpositionen och av differentialekvationerna

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{R^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2xyR^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Vid  $t = 0$  befinner sig fyra partiklar vid  $x = -4$  med  $y$ -positionerna 0.2, 0.6, 1.0 och 1.4. Beräkna och rita deras strömningskurvor fram till tiden  $t = 12$ . Notera läget för de fyra partiklarna vid denna tidpunkt. Den understa partikeln har hamnat på efterkälken. Beräkna med en effektiv algoritm hur lång tid som krävs för att den ska nå fram till samma  $x$ -position som den översta har vid  $t = 12$ .

Vi vill studera hur ett paket av flödespartiklar deformeras när det strömmar förbi cylindern. Det gäller att lösa differentialekvationssystemet en tidsetapp i taget och rita en ögonblicksbild av partikelpositionerna. Låt startformationen för partiklarna vara en regelbunden tjugohörning med centrum i  $(-4, 1)$  och radiella avståndet 0.6 till hörnen. Beräkna arean av varje deformerad polygon. För en sluten polygon finns areaformeln:  $A = (x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \dots + x_ny_1 - x_1y_n)/2$ .

Gör om beräkningarna för en fyrtiohörning. Genomför också en richardsonextrapolation på areavärdena med antagandet att areaformeln har samma noggrannhetsordning som trapetsregeln. Fortsätt eventuellt med en fördubbling av antalet hörn.



Vilken slutsats kan dras om partikelpaketets area under strömningen? Utför egna experiment med annan startform på paketet och andra positioner i  $y$ -led.

#### Utvidgning: Partikelflöde förbi en sfär (3D-problem)

Cylindern i den strömmande vätskan byts ut mot en sfär med centrum i origo och radien  $R = 2$ . I sfären finns en dipolskälla riktad i positiv  $x$ -led med en styrka sådan att flödespartikelns läge  $(x(t), y(t), z(t))$  bestäms av följande differentialekvationer där  $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ :

$$dx/dt = 1 - R^3(2x^2 - y^2 - z^2)/2s^5, \quad dy/dt = -3R^3xy/2s^5, \quad dz/dt = -3R^3xz/2s^5$$

Börja med att beräkna och rita strömningskurvor fram till tiden  $t = 15$  för några partiklar som alla startar vid  $x = -6$ . Värden på  $y(0)$  och  $z(0)$  väljer du själv.

Skapa sedan ett partikelpaket i form av en polyeder med hjälp av  
`np=8; [X,Y,Z]=sphere(np); w=0.6; X=-6+w*X; Y=y0+w*Y; Z=z0+w*Z;`

Använd egna värden på  $y_0$  och  $z_0$  och utför beräkningar för att studera hur polyedern av partiklar deformeras när den strömmar förbi sfären. Räkna också på en polyeder med `np=16`.

Hur är det med partikelpaketets volym under färden? Hur räknar man ut volymen för en deformerad polyeder? Fundera på det!

Efter lite grubblande kan du få tillgång till en funktion som beräknar volymen genom summation av många små pyramidvolymmer.

