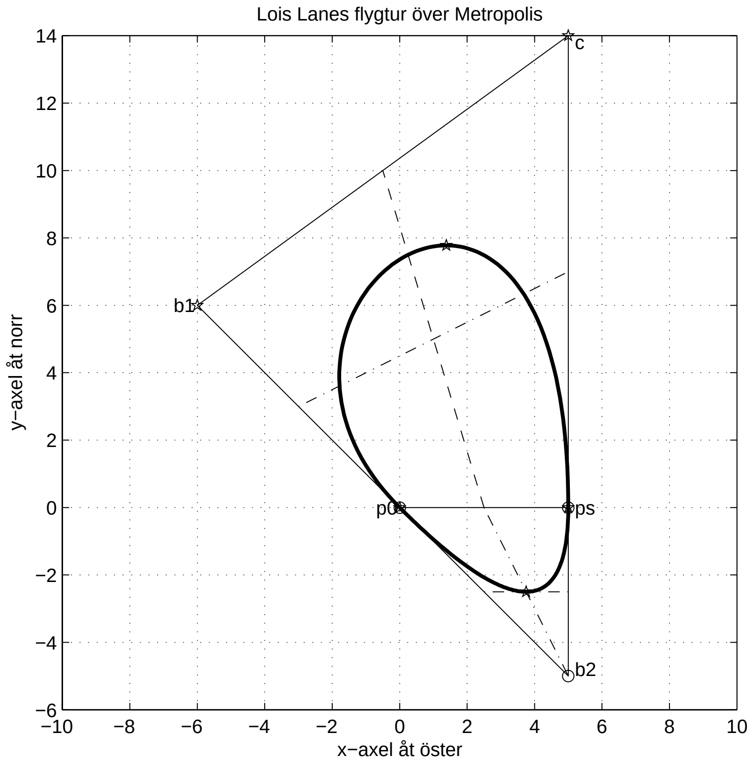
Lösning till fiktiv tentamen i Numeriska metoder

DEL 2

1. *Flygtur med Stålmannen*

Lois Lane flygtur över Metropolis har form av två bézierbanor: en kubisk bézierkurva med start i origo, styrpunkter $(-6,\ 6)$ och $(5,\ 14)$ och slutpunkt $(5,\ 0)$, därefter en kvadratisk bézierkurva som börjar i $(5,\ 0)$, har styrpunkten $(5,\ -5)$ och slutar i origo. Skissera kurvorna med hjälp av kända geometriska egenskaper hos bézierkurvan. Ange ungefärliga koordinater för flygturens nordligaste och sydligaste punkter.



Den kvadratiska bézierkurvans $\mathbf{r}(1/2)$ ligger på den nedersta markerade horisontella konstruktionslinjen (halvvägs ner mot styrpunkten). Sydpunkten är $(3.75,\ -2.5)$ som med enkel geometri beräknas exakt.
Utnyttja proportionerna $3 : 1$ för att markera den kubiska bézierkurvans $\mathbf{r}(1/2)$, kurvlutningen där är känd och bestäms av den streckprickade konstruktionslinjen. Nordligaste punkten finns ungefär vid $(1.4,\ 7.8)$.

2. *Månlandning*

Stålmannens höjd $z(t)$ över månytan bestäms av $d^2z/dt^2 = 3\,(dz/dt)^2/z - 1.62$ med $z(0) = 1000$ och $z'(0) = -100$. Han stiger ned på månytan då höjden understiger en meter. Landningstid: $t = t_{moon}$. Månlandningssimulering med Eulers metod.

```
 clear, clf
 dt=1;
% Omskrivning: u1=z, u2=z'  =>  u1'=u2,  u2'=3u2^2/u1-1.62
 for koll=1:2
   t=0;  u=[1000 -100];  U=u;  T=t;
   while u(1)>1
     f=[u(2) 3*u(2)^2/u(1)-1.62];
     u=u+dt*f;  t=t+dt;
     U=[U; u];  T=[T; t];
   end
```

```
    tmoon=t
    subplot(2,1,1), plot(T,U(:,1)), hold on
    title('Stålmannens höjd som funktion av tiden')
    subplot(2,1,2), plot(T,U(:,2)), hold on
    title('Stålmannens hastighet som funktion av tiden')
    dt=dt/2;
  end
```

3. *Silhuetten av ett månberg*

Med N intervall gäller här $h = (2-0)/N$ och antal obekanta är $n = N-1$. Bestäm de okända y_i-värdena vid $x_i = i \cdot h,\ i = 1, 2, ..., n$. Ersätt derivatorna y_i'' och y_i' med differenskvoter.

$$y_i'' + 2x_i y_i' - 0.5y_i = 20 \sin \pi x_i,\ \ y_0 = 1,\ y_N = 5$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 2x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 0.5y_i = 20 \sin \pi x_i,\ \ i = 1, 2, ..., n$$

Efter förlängning med h^2 och sortering av termerna erhålls

$$(1 - hx_i)y_{i-1} - (2 + 0.5h^2)y_i + (1 + hx_i)y_{i+1} = 20h^2 \sin \pi x_i$$

För $i = 1$ erhålls $-(2 + 0.5h^2)y_1 + (1 + hx_1)y_2 = 20h^2 \sin \pi x_1 - (1 - hx_1)$
och $i = n$ ger $(1 - hx_n)y_{n-1} - (2 + 0.5h^2)y_n = 20h^2 \sin \pi x_n - 5\,(1 + hx_n)$.
Det leder till ett tridiagonalt ekvationssystem för bestämning av de n y_i-värdena.

Fallet $N = 5$: $n = 4,\ h = 0.4,\ h^2 = 0.16$. Alla diagonalelement är -2.08.
Superdiagonal: $1 + hx_i,\ i = 1, 2, 3$. Elementen blir 1.16, 1.32, 1.48.
Subdiagonal: $1 - hx_i,\ i = 2, 3, 4$. Elementen blir 0.68, 0.52, 0.36.

$$\begin{pmatrix} -2.08 & 1.16 & 0 & 0 \\ 0.68 & -2.08 & 1.32 & 0 \\ 0 & 0.52 & -2.08 & 1.48 \\ 0 & 0 & 0.36 & -2.08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.2 \sin 0.4\pi - 0.84 \\ 3.2 \sin 0.8\pi \\ 3.2 \sin 1.2\pi \\ 3.2 \sin 1.6\pi - 5 \cdot 1.64 \end{pmatrix}$$

4. *Röd kryptonit*

Lex Luthor har lokaliserat ett stort kryptonitklot, sju uppsättningar mätdata:

x	1	4	6	6	7	9	11
y	1	6	1	5	8	5	2
z	-7.5	-5.0	-4.5	-4.5	-7.0	-5.5	-8.0

Föreslå en metod för att bestämma klotets medelpunkt och radie och skriv ett program som gör det. Klotets ekvation är $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

```
  x=[1 4 6 6 7 9 11]';
  y=[1 6 1 5 8 5 2]';
  z=-[7.5 5 4.5 4.5 7 5.5 8]';
% Gauss-Newtons metod för överbestämda ickelinjära system
% 7 ekvationer, 4 obekanta: a, b, c, R
  a=6; b=5; c=-10; R=6;      % Goda startgissningar krävs
  for iter=1:5
    f=(x-a).^2 +(y-b).^2+(z-c).^2-R^2;
    fkvsum=f'*f              % kollar felkvadratsumman
    J=-2*[x-a y-b z-c R*ones(7,1)];
    dp=-J\f;                 % minstakvadratlösning
    a=a+dp(1); b=b+dp(2); c=c+dp(3); R=R+dp(4);
  end
  a, b, c, R     % Klotets mittpunkt och radie skrivs ut
```