

Fiktiv tentamen i Numeriska metoder

DEL 2 (50p).

Inga hjälpmedel. Del 2 rättas endast om del 1 är godkänd!

Betygsgränser: 12p D, 22p C, 32p B, 42p A (poängsumma i del 2 plus ev bonuspoäng).

1. Flygtur med Stålmannen

- (10p) Journalisten Lois Lane får en uppfriskande flygtur över Metropolis. Flygturen sker på konstant höjd (xy -planet med Metropolis högsta torntopp i origo, x -axeln åt öster, y -axeln åt norr) och har form av två bézierbanor: en kubisk bézierkurva med start i origo, styrpunkter $(-6, 6)$ och $(5, 14)$ och slutpunkt $(5, 0)$, därefter en kvadratisk bézierkurva som börjar i $(5, 0)$, har styrpunkten $(5, -5)$ och slutar i origo. Längdenheten är km. Skissera kurvorna med hjälp av kända geometriska egenskaper hos bézierkurvan. Ange ungefärliga koordinater för flygturens nordligaste och sydligaste punkter.

2. Månlandning

Vid Stålmannens månatliga månbesök är han angelägen om att göra en mjuklandning för att inte utlösa en månbävning. Han formar därför läpparna till en strut och riktar en luftström mot månytan. Hans höjd $z(t)$ över månytan kommer då att bestämmas av differentialekvationen

$$d^2z/dt^2 = 3(dz/dt)^2/z - \beta,$$

$\beta = 1.62 \text{ m/s}^2$ är månens tyngdacceleration.

Högerledets första term utgörs av luftströmmens bromsverkan (om hastigheten är hög och månytan är nära ska han blåsa som bara den).



- (12p) Höjd och hastighet för Stålmannen vid $t = 0$ är $z(0) = 1000 \text{ m}$ och $z'(0) = -100 \text{ m/s}$. Stålmannen stiger ned på månytan då höjden understiger en meter. Landningstiden är då $t = t_{\text{moon}}$. Skriv om till ett ode-system av första ordningen och gör en månlandningssimulering med Eulers metod, dels med tidsteget en sekund, dels halva steget. Simuleringsalgoritmen (gärna MATLAB-kod) ska också rita kurvorna för $z(t)$ och $z'(t)$ och skriva ut t_{moon} -värdet.

3. Silhuetten av ett månberg

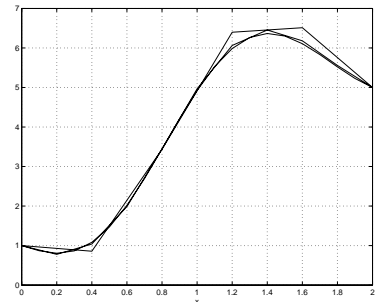
Bakom Stålmannen i bilden ovan skymtar ett månberg med en silhuett som bestäms av lösningen $y(x)$ till randvärdesproblemet

(14p)
$$d^2y/dx^2 + 2x dy/dx - 0.5y = 20 \sin \pi x, \quad y(0) = 1, \quad y(2) = 5$$

(längdenheten är 100 m). Figuren visar månbergets höjdkurva då lösningen beräknats med finitadifferensmetoden (FDM) med $N = 5$, $N = 10$ resp $N = 20$ intervall.

Härled (för allmänt N -värde) det ekvationssystem som uppstår för beräkning av y -värdena med FDM.

Studera sedan speciellt fallet $N = 5$. Ange de numeriska värdena för alla element i matrisen i vänsterledet och uttrycken för högerledets komponenter.



Vänd!

4. Röd kryptonit

(14p) Lex Luthor har lokaliserat ett stort kryptonitklot några meter under Metropolis. För att bestämma klotets storlek och läge borrar han sju hål från marken (planet $z = 0$). På markytan har borrhålen koordinaterna (x_i, y_i) enligt nedanstående tabell. Provhålen är helt lodräta, så Luthor kan mäta djupet z_i för klotytan i vart och ett av de sju borrhålen:

x	1	4	6	6	7	9	11
y	1	6	1	5	8	5	2
z	-7.5	-5.0	-4.5	-4.5	-7.0	-5.5	-8.0

Föreslå en metod för att ur dessa data bestämma klotets medelpunkt och radie och skriv ett MATLAB-program som gör det.

Ekvationen för ett klot lyder $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

