KTH-CSC

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212,DN1214,DN1215, DN1240,DN1241,DN1243
Lördag 19/3 2011, kl 9-12

DEL 2 Lösningar

1. Ekvationslösning

a. Skissera i samma xy-koordinatsystem de två kurvorna $y = e^x$ (1) och $y = 0.5 - ax$ (2). Kurvan (1) skär y-axeln i punkten $(0, 1)$ och har hela tiden positiv lutning. Den räta linjen (2) skär y-axeln i punkten $(0, 0.5)$ och har hela tiden negativ lutning ($a > 0$). Från figuren ser man att kurvorna skär varandra i en punkt där $x < 0$. Denna punkt är just roten α.

b. $x_{n+1} = x_n - (e^{x_n} + ax_n - 0.5)/(e^{x_n} + a)$, $x_0 = -0.2$. MATLAB-program, se t ex EXSamlingen Ex. 2.6.

c. $x_{n+1} = F(x_n)$. I vårt fall $x_{n+1} = 0.5 - e^{x_n}$. Konvergerar om $|F'(\alpha)| < 1$. I vårt fall $|-e^{-0.2}| \approx 0.8 < 1$, dvs konvergerar.

d. Gör störningsräkning: Lös först problemet för $a = 1.0$ vilket ger rotvärdet α. Lös sedan problemet för $a = 1.05$ vilket ger rotvärdet α_{st}. $E_\alpha = |\alpha - \alpha_{st}|$.

2. Derivata-approximation

a. $f'(0) = D_1(h)+O(h)$, där $D_1(h) = (f(h)-f(0))/h$. $D_1(0.25) = (0.24-0)/0.25 = 0.96$, $D_1(0.5) = (0.46 - 0)/0.5 = 0.92$

b. Låt $D_2(h) = (-f(2h)+4f(h)-3f(0))/2h$. $D_2(0.25) = (-0.46+4\cdot0.24-0)/0.5 = 1$ och $D_2(0.5) = (-0.87 + 4 \cdot 0.46 - 0)/1 = 0.97$

c. Trunkeringsfelen för formeln i a) blir $|0.96-1.01| = 0.05$ resp $|0.92-1.01| = 0.09$. Felet är (nästan) proportionellt mot h, dvs noggrannhetsordningen är ett.

För formeln i b) $|1 - 1.01| = 0.01$ resp $|0.97 - 1.01| = 0.04$. Felet minskar med en faktor 4 när steget halveras, dvs noggrannhetsordningen är två.

d. $D_2(h) = (-(f(x)+2hf'(x)+(4h^2/2)f''(x)+O(h^3))+4(f(x)+hf'(x)+(h^2/2)f''(x)+O(h^3)) - 3f(x))/2h = f'(x) + O(h^3)/2h = f'(x) + O(h^2)$

3. Följande begynnelsevärdesproblem är givet

a. Låt $y_1 = u$ och $y_2 = \dot{u}$. Då erhålles systemet på vektorform:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad y_1(0) = 1, \qquad \dot{y}_2 = -y_1 - y_2 + t, \quad y_2(0) = 0$$

b. Eulers metod på systemet i a) blir

$$y_1^{(k+1)} = y_1^{(k)}+hy_2^{(k)}, \quad y_1^{(0)} = 1, \qquad y_2^{(k+1)} = y_2^{(k)}+h(-y_1^{(k)}-y_2^{(k)}+t_k), \quad y_2^{(0)} = 0$$

Vi får $y_1^{(1)} = 1 + 0.5 \cdot 0 = 1$, $y_2^{(1)} = 0 + 0.5 \cdot (-1 - 0 + 0) = -0.5$, $t_1 = 0.5$ och efter ännu ett steg $y_1^{(2)} = 1+0.5\cdot(-0.5) = 0.75$, $y_2^{(2)} = -0.5+0.5\cdot(-1+0.5 + 0.5) = -0.5$, $t_2 = 1$. Dvs $\dot{u}(1) = -0.5$ med Eulers metod.

c. Två olika metoder:

1) derivera integralrelationen så erhålles $\dot{z}(t) = u(t)^2 + \dot{u}(t)^2, \quad z(0) = 0$. Låt $y_3 = z$ så fås en tredje diff.ekv till systemet i a): $\dot{y}_3 = y_1^2 + y_2^2, \quad y_3(0) = 0$. Detta system av tre första ordningen diff.ekv kan lösas med t ex ODE45.

2) Lös först systemet i a) med ODE45. Då erhålles 3 lösningskolumner; en med t-värdena och två kolumner med u- och $\dot{u}$-värdena, bägge uträknade i de t-värden som anges i den första kolumnen. Låt kolumnen $t = (t_0, t_1, t_2, ..., t_N)^T$, där $t_0 = 0$ och $t_N = 10$. Då fås med trapetsregeln $z(t_0) = 0, z(t_1) = (t_1 - t_0) \cdot ((u_0^2 + \dot{u}_0^2)/2 + (u_1^2 + \dot{u}_1^2)/2), z(t_2) = z(t_1) + (t_2 - t_1) \cdot ((u_1^2 + \dot{u}_1^2)/2 + (u_2^2 + \dot{u}_2^2)/2), z(t_3) = z(t_2) + (t_3 - t_2) \cdot ((u_2^2 + \dot{u}_2^2)/2 + (u_3^2 + \dot{u}_3^2)/2), ...$ Slutligen plottas $u(t)$ och $z(t)$ som funktion av t på t-intervallet $[0, 10]$.

4. a. Approximera integralen med trapetsregeln steget h så erhålles en summa $T(h, k)$ med termer av typ $he^{-kx_i^2}/(1 - x_i^2)$ där summationen görs över i. I denna summa ingår parametern k som enda obekanta. Lös ekvationen $T(h, k) - 0.5 = 0$ med Newton-Raphsons metod (eller sekantmetoden).

b. 1) Beräkna integralen med trapetsregeln med givet värde på h i en slinga för olika värden på k i intervallet $[0, K]$, där K väljs så att integralen blir mindre än 0.5. Välj det k-värde som ger ett integralvärde närmast 0.5.

2) (alternativ) Antag att $e^{-kx^2} \approx 1 - kx^2/2$ gäller med hyfsad noggrannhet för x i intervallet $[-1, 1]$. Då kan vi bestämma integralen analytiskt och får fram en ekvation i k som ger ett värde $k \approx 3$.

c. 1) Ge en steglängd h 2) Ge k ett startvärde. 3) Inför en while-slinga som kör så länge som korrektionen till k är större än säg 10^{-5}. 4) För k-värdet bilda trapetssumman $T(h, k)$ och dess derivata med avs på k. 5) Gör Newton-Raphson iteration, dvs uppdatera k. 6) Gå tillbaks till 3). 7) När korrektionen blivit tillräckligt liten, gå till 1) och ge en mindre steglängd, t ex $h/2$. Kör slingan 2)-6) igen men använd föregående k-värde som startvärde. Avbryt när skillnaden mellan två k-värden från två succesiva h-värdenstegen blivit tillräckligt liten.

d. Trunkeringsfel från trapetsvärdena samt Newton-iterationerna. Felet från Newton kan göras godtyckligt litet i den inre slingan. Trunkeringsfelet från trapetsvärdena kan också göras godtyckligt litet om steget halveras tillräckligt många gånger. Man kan även pröva med extrapolation för att förbättra noggrannheten.