Bengt Lindberg
100820

Lösning till hemuppgifter för D och E, No. 1

1. Vi skriver om systemet på standardform genom att flytta över alla termer med obekanta till vänstra ledet och stuva om. Då erhålls

$$\begin{aligned} x_M - 0.5x_G - \ 0.1x_S &= 20,000 \\ -0.2x_M + x_G - \ 0.6x_S &= 40,000 \\ -0.1x_M - 0.25x_G + x_S &= 20,000 \end{aligned}$$

eller med vektor och matrisbeteckningar $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -\ 0.1 \\ -0.2 & 1 & -\ 0.6 \\ -0.1 & -0.25 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_M \\ x_G \\ \mathbf{x_s} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20,000 \\ 40,000 \\ 20,000 \end{pmatrix}$$

Matlabprogrammet blir

```
A=[1     -0.5  -0.1
   -0.2   1    -0.6
   -0.1 -0.25  1  ]
b=[20000; 40000; 20000]
x=A\b                          %x_1=x_M, x_2=x_G, x_3=x_S
```

2. Det överbestämda linjära ekvationssystemet skrivs $A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$ med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Koefficienterna i normalekvationerna blir

$$A^T A = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

så lösningen blir

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8/11 \\ 14/6 \end{pmatrix}$$

Residualvektorn blir

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/11 \\ 14/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/33 \\ -35/33 \\ -5/33 \end{pmatrix}$$

så

$$A^T\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Definiera

$$f(x) = \frac{1}{x^4} + e^{x-100} - 10^8 \qquad \text{med derivatan} \qquad f'(x) = -\frac{4}{x^5} + e^{x-100}$$

och Newtons metod skriver vi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Med $x_0 = 1$ får vi $f(1) = 1 + e^{-99} - 10^8 \approx -10^8$ och $f'(1) \approx -4$ så nästa approximation blir ca -2.5×10^7.

Med $x_0 = 0$ får vi divison med noll såväl i funktionsvärde som derivata, så det fungerar ej.

Startgissning: Termen e^{x-100} är försumbar jämfört med 10^8 för alla x på intervallet $(0, 1)$. Om vi stryker den får vi ekvationen

$$\frac{1}{x^4} = 10^8$$

med lösningen $u = 0.01$.

Felskattning: Felskattninge får vi som

$$\frac{f(u)}{f'(u)} = \frac{0.01^{-4} + e^{0.01-100} - 10^8}{-0.01^{-5} + +e^{0.01-100}} \approx \frac{3 \times 10^{-44}}{-10^{10}} \approx -3 \times 10^{-54}$$

4. Det icke-linjära ekvationssystemet skrivs

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= x^2 + y^2 - 2.12 \\ F_2(x, y) &= y^2 - x^2 y - 0.04 \end{aligned}$$

Vi skriver $\mathbf{f(z)} = \mathbf{0}$ med $\mathbf{z} = \mathbf{(x, y)^T}$. Newtons metod skrivs

$$\mathbf{z_{i+1}} = \mathbf{z_i} + \mathbf{d_i}, \qquad \mathbf{J_i d_i} = -\mathbf{f(z_i)}$$

Jakobianmatrisen blir

$$J = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2xy & 2y - x^2 \end{pmatrix}$$

Med startvärdet $x = 1$, $y = 1$ blir

$$\mathbf{f(z_0)} = \begin{pmatrix} -0.12 \\ -0.04 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J_0} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

så det linjära ekvationssystem som skall lösas i första iterationen är

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0.12 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

Lösningen blir $d_1 = -0.06 + 0.16/3$, $d_2 = -0.16/3$ så nästa iterat är $x_1 = 1 - d_1 = 1.0067$, $y_1 = 1 - d_2 = 1.0533$

```
format short e, format compact
disp('      z         F(z)              d=J\F(z)');
z=[1;1];    %Startvektor
d=z;
iter=1;
while ( (norm(d,inf) > 1.0e-6) & (iter < 20)),
  x=z(1); y=z(2);
  F =[x^2+y^2-2.12
      y^2-x^2*y-0.04];
  %Jacobian
  J=[2*x 2*y
     -2*x*y 2*y-x^2];
  d =-J\F;
  disp(iter)
  disp([z F d])
  z=z+d; iter=iter+1;
end
format long
z
```