Fö 12, DN1241,1243, Repetition, Kursinnehåll

Ekvationer

$$f(x) = 0, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{0}$$

Begrepp: algoritm, iteration, konvergens, konvergensordning, lokal linjarisering, Taylors formel.

Startgissningar:

- storleksresonemang, skala, $x^4 - 0.1x^3 = x + 100$
- serieutveckling
- rita på fri hand, $x = e^{-x}$
- låt datorn rita

Iterationsformler:

- Newton för skalär ekv och system
- sekantmetoden
- intervallhalvering
- fixpunktiteration
- Gauss-Newtons metod

Konvergens: En metod ger följden $x_k, k = 0, 1, \ldots$. Om

$$\lim_{k \to \inf} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^r} = C$$

- r är konvergensordningen
- C är den asymptotiska felkonstanten
- r=1 innebär linjär konvergens
- r=2 innebär kvadratisk konvergens

Felskattning:

- Newton: fel skattas med korrektionen, kontrollera kvadratisk konvergens med korrektionerna.
- Metodoberoende: α är en approximativ lösning till $f(x) = 0$. Då gäller $|\alpha - x^*| \leq |f(\alpha)/f'(\alpha)|$ (jfr Newton)
- Jämför experimentell felkalkyl! Låt $f(x^*) = 0$ och $f(\alpha) \neq 0$. Då blir

  $$E_f = |f(\alpha)| = |f(\alpha) - f(x^*)| \approx |f'(\alpha)(\alpha - x^*)|$$

  Om vi löser ut felet $|\alpha - x^*|$ i x-värdet erhålls den metodoberende felskattningen.

System, välbestämda och överbestämda:

- Jakobianmatris
- Taylors formel för system
- Numerisk approximation till Jakobianen, kolumn j ges av $(\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}\mathbf{e}_\mathbf{j})-\mathbf{f}(\mathbf{x}))/\mathbf{h}$

Linjär algebra

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{x}\approx\mathbf{b}$$

Begrepp: Vektor, matris, determinant.

Allmänt

- Gausseliminering, arbetsvolym
- Triangulär, tridiagonal, gles matris, arbetsvolym
- Formulera små linjära ekv för hand
- lösa system i Matlab
- normer, konditionstal, felskattning
- minstakvadratmetoden
- normalekvationerna
- residualvektorn, MKV minimerar den Euklidiska normen av residualvektorn.

Interpolation

- linjär, kvadratisk, med polynom av grad n
- ansatser, naiva, centrerad, Newtons
- styckevisa funktioner, styckevis linjär, styckevis kubisk
- Hermiteinterpolation
- kubiska splines

Derivator

- $$y'_n \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$
- $$y'_n \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$
- $$y'_n \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$$
- $$y''_n \approx \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}$$
- Trunkeringsfel
- Fel pga fel i indata
- Noggranhetsordning, felutveckling, extrapolation
- Trunkeringsfelet analyseras med Taylorutveckling

Integraler

- Area
- Trapetsregeln
- Felutveckling, noggranhetsordning, extrapolation
- Förbehandling, singularitet
- oändligt integrationsintervall, svanskapning

Modeller, linjära och icke-linjära

- Linjär
$$y(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x_1 \Phi_1(t) + x_2 \Phi_2(t) + \ldots x_n \Phi_n(t)}$$
- Linjär modell leder till överbestämt linjärt ekvationssystem $A\mathbf{x} \approx \mathbf{y}$.
- För polynommodeller kan centrering användas.
- Ickelinjär $y(t, \mathbf{x}) = \mathbf{\Psi(t, x)}$ där $\mathbf{x}$ ej ingår linjärt.
- Ickelinjär modell leder till överbestämt ickelinjärt ekvationssystem $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ där
$$f_j(\mathbf{x}) = \mathbf{\Psi(t_j, x) - y_j, j = 1, 2, \ldots, m}$$
- De överbestämda linjära systemen löses med minstakvadratmetoden
- De överbestämda ickelinjära systemen löses med Gauss-Newtons metod, minstakvadratmetoden

Differentialekvationer, begynnelsevärdesproblem

$$\frac{d\mathbf{y}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(\mathbf{a}) = \mathbf{c}$$

- riktningsfält, lösningskurvor
- fel och feltransport
  1. lokalt fel
  2. globalt fel
  3. noggranhetsordning
  4. stabilitet och instabilitet
- praktik
  1. omskrivning till system av första ordningen
  2. räkna för hand några steg på såväl skalärt problem som litet system (Euler, Baklänges Euler, eller givna formler)
  3. simulera med Matlab, eget program från ax till limpa
  4. simulera med Matlab med ode23, ode45 eller dylikt med någon knorr
  5. skatta globala felet genom att lösa problemet med olika toleranser eller steglängder

Differentialekvationer, randvärdesproblem

Typexempel

$$\frac{d^2\mathbf{y}}{\mathbf{dt^2}} = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{y}, \mathbf{y}'), \qquad \mathbf{y}(\mathbf{a}) = \alpha, \quad \mathbf{y}(\mathbf{b}) = \beta$$

- differensmetod
  1. diskretisera området
  2. diskretisera ekvation och randvillkor, derivataapproximationer
  3. formulera linjärt/ickelinjärt ekvationssystem
  4. lös ekvationssystemet (Newton, studera konvergens av iterationerna)
  5. noggrannhet, räkna med olika steglängder, studera hur diskretiseringsfelet uppför sig.
  6. noggranhetsordning
- inskjutningsmetoden ingår ej på tentan