

NADA, KTH, Bengt Lindberg
DN1241, DN1243, 100820

Hemuppgifter nr 4

Maxpoäng för uppgifterna anges inom parentes bredvid uppgiftsnumret. Alla hjälpmedel tillåtna. Vid den ordinarie tentamen är inga hjälpmedel tillåtna.

Som träning inför sluttentamen är det lämpligt att försöka lösa uppgifterna utan hjälpmedel, och först därefter ta fram hjälpmedel för kontroll.

Endast handskrivna lösningar tas emot.

(3) **HT1.** Givet följande överbestämda linjära ekvationssystem $Ax \approx b$:

$$x_1 + 2x_2 \approx 6$$

$$x_1 + x_2 \approx 2$$

$$-3x_1 + x_2 \approx 0$$

Beräkna för hand minstakvadratlösningen, residualvektorn och dess Euklidiska norm.

(2) **HT2.** Integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^9 + \sqrt{1+t^2}}$$

skall beräknas numeriskt. Genomför matematisk förbehandling så integralen kan beräknas med t.ex. trapetsregeln. Felet önskas mindre än 10^{-5} .

(2) **HT3a.** Härled felet i approximationen

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

samt ange noggrannhetsordningen.

(3) **HT3b.** Skriv om differentialekvationsproblemet

$$y''' + \cos(x)y' - 5y^2 = 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0$$

som ett system av första ordningen.

(4) **HT3c.** Approximationer till en integral har beräknats numeriskt med trapetsregeln med steglängderna nedan.

h	0.04	0.02	0.01
w	10.10272	10.09367	10.09141

Bestäm en bättre approximation till integralen från de givna värdena. Skatta felet.

HT4. Givet en tabell

x	10 001	10 002	10 003
g(x)	10	12	13

(3) **HT4a.** Man vill interpolera $g(x)$ med ett polynom $P(x)$ av lämpligt gradtal. Föreslå en bra ansats för det sökta polynomet, och bestäm dess koefficienter.

(2) **HT4b.** Bestäm $g(10\,001.4)$ med **linjär** interpolation.

(3) **HT5a.** Givet ekvationen

$$x^3 + 0.2x = 64$$

som har en rot i intervallet $1 < x < 5$. Formulera Newtons metod för bestämning av roten. Gör en iteration med startvärdet $x=1$. Bestäm ett bättre startvärde än $x_0 = 1$. Motivera hur du kommer fram till startvärdet.

(4) **HT5b.** Inför lämpliga beteckningar och formulera Newtons metod för följande problem.

$$15x + y - z^2 = 30, \quad -z - x + 30y = 30, \quad -x^2 + 100z + y = 20$$

Bestäm en grov startapproximation, och formulera det linjära ekvationssystem som skall lösas i den första iterationen. Uttryck med siffervärden insatta räcker.

(3) **HT6.** Ge minst två exempel på användning av begreppet lokal linjarisering för härledning av numeriska metoder eller algoritmer inom de problemområden som behandlas i kursen. Genomför härledningen för ett av dina exempel.

HT7. Funktionerna $u(t)$ och $v(t)$ satisfierar

$$u'' + v^2u = \sin t; \quad v'' + u^2v = \sin(2t)$$

$$u(0) = 1, u'(0) = 0.2, v(0) = -0.2, v'(0) = 0.5$$

(3) **HT7a.** Skriv problemet på standardform.

(3) **HT7b.** Skriv ett Matlabprogram som simulerar lösningen för $0 \leq t \leq 2$. Programmet skall rita grafen för $u(t)$ och $v(t)$ för $0 \leq t \leq 2$ samt skriva ut värdet av $u(2)$ respektive $v(2)$.

SLUT!