LÖSNINGAR till Tentamen i Numeriska metoder gk2 och gk3, 06-10-24

Tentans del 1 är frågor hämtade från ”Femtio teorifrågor”. Här visas lösningsförslag till del 2 (25p).

1. Muffinsfrosseri

a) Hermitemuffins med Hermites interpolationsformel:

$$z(x_1 + t\,h) = z_1 + t\Delta z + t(1-t)(hk_1 - \Delta z) + t^2(1-t)(2\Delta z - h(k_1 + k_2))$$

med $x_1 = 0,\ h = 3.7,\ z_1 = 7.5,\ \Delta z = 3.5 - 7.5 = -4,\ k_1 = 0$ och $k_2 = -1$.
Det leder till följande uttryck: $x(t) = 3.7t$ och
$z(t) = 7.5 - 4t + 4t(1-t) + t^2(1-t)(-8 - 3.7(0-1))$ eller $z(t) = 7.5 - 8.3t^2 + 4.3t^3$.

```
% b) Beziermuffins
    Hb=7.5; r2=3.7; hf=3.5;
    t=(0:0.01:1)';
    p1=[0 Hb];  p2=[r2 hf];  b=[r2/2 Hb];  c=[r2/2 16/3];
    F=[(1-t).^3  3*t.*(1-t).^2  3*t.^2.*(1-t)  t.^3];
    r=F*[p1; b; c; p2];
    xb=r(:,1); zb=r(:,2);
    plot(xb,zb,-xb,zb)

% c) Beziermuffinsvolym
     Vform=pi*hf/3*(r1^2+r1*r2+r2^2)

   % Integranden är pi*xb.^2.*zprim
     V=[];
     n=50;                         % lämpligt antal steg
     for j=1:2                     % trapetsregeln två gånger
       dt=1/n; t=0:dt:1;
       xb=r2*(1.5*t-1.5*t.^2+t.^3);
       f=pi*xb.^2.*(-13*t+7.5*t.^2);
       Vtrap=-dt*(sum(f)-(f(1)+f(end))/2);
       V=[V Vtrap];
       n=2*n;
     end
     Vtopp=V(2)+(V(2)-V(1))/3     % richardsonextrapolation
     Vbez=Vform+Vtopp

% d) Kompaktmuffins, ekv.lösning ger toppdelens höjd q
     q=3; dq=1;
     while abs(dq/q)>1e-10          % Newton-Raphsons metod
       f=pi/6*(3*q*r2^2+q^3)-Vtopp;
       fp=pi/2*(r2^2+q^2);
       dq=-f/fp, q=q+dq;
     end
     q, H=hf+q

% Tillägg (inte på tentan)
% För att rita kompaktmuffinsen behövs cirkelbågens radie
% (erhålls via en figur med muffinstvärsnittet)
  R=(r2^2+q^2)/(2*q)
  xs=(0:r2/20:r2)';
  zs=(H-R)+sqrt(R^2-xs.^2);
  plot(xs,zs,'--', -xs,zs,'--'), axis equal

% Resultat: Vform =  106.99, Vtopp = 70.76,  Vbez  = 177.75
% Kompaktmuffins:  q=2.772  => H=6.27
```

2. Randvärdesproblem med FDM

Med N intervall gäller här $h = (2-0)/N$ och antal obekanta är $n = N-1$. Bestäm de okända y_i-värdena vid $x_i = i \cdot h,\ i = 1, 2, ..., n$. Ersätt derivatorna y_i'' och y_i' med differenskvoter.

$$y_i'' + 2x_i y_i' - 0.5y_i = 20 \sin \pi x_i, \quad y_0 = 1,\ y_N = 5$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 2x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 0.5y_i = 20 \sin \pi x_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

Efter förlängning med h^2 och sortering av termerna erhålls

$$(1 - hx_i)y_{i-1} - (2 + 0.5h^2)y_i + (1 + hx_i)y_{i+1} = 20h^2 \sin \pi x_i$$

För $i = 1$ erhålls $-(2 + 0.5h^2)y_1 + (1 + hx_1)y_2 = 20h^2 \sin \pi x_1 - (1 - hx_1)$

och $i = n$ ger $(1 - hx_n)y_{n-1} - (2 + 0.5h^2)y_n = 20h^2 \sin \pi x_n - 5\,(1 + hx_n)$.

Det leder till ett tridiagonalt ekvationssystem för bestämning av de n y_i-värdena.

Fallet $N = 5$: $n = 4,\ h = 0.4,\ h^2 = 0.16$. Alla diagonalelement är -2.08.

Superdiagonal: $1 + hx_i,\ i = 1, 2, 3$. Elementen blir 1.16, 1.32, 1.48.

Subdiagonal: $1 - hx_i,\ i = 2, 3, 4$. Elementen blir 0.68, 0.52, 0.36.

$$\begin{pmatrix} -2.08 & 1.16 & 0 & 0 \\ 0.68 & -2.08 & 1.32 & 0 \\ 0 & 0.52 & -2.08 & 1.48 \\ 0 & 0 & 0.36 & -2.08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.2 \sin 0.4\pi - 0.84 \\ 3.2 \sin 0.8\pi \\ 3.2 \sin 1.2\pi \\ 3.2 \sin 1.6\pi - 5 \cdot 1.64 \end{pmatrix}$$

3. Modellanpassning

Periodisk modellfunktion med cosinustermer.

```
% 3a. Linjär modell, minstakvadratmetoden
  t=(0:2:12)';
  y=[8.0 6.0 2.5 8.2 8.0 1.6 7.0]'; stem(t,y), hold on
  tt=0:0.1:12;
  w=2*pi/7;
  A=[ones(7,1) cos(w*t) cos(2*w*t)];
  p=A\y;
  res=y-A*p; fkvsum=res'*res
  a=p(1), b=p(2), c=p(3)
  F=a+b*cos(w*tt)+c*cos(2*w*tt);
  plot(tt,F,':'), hold on

% 3b. Ickelinjär modell, Gauss-Newtons metod
% Utnyttja a,b,c från 3a (eller gissa ur figur a=6, b=3, c=0, w=2*pi/7)
  p=[a b c w]'; dpnorm=1;
  while dpnorm>1e-8
    f=a+b*cos(w*t)+c*cos(2*w*t)-y;
    fkvsum=f'*f
    J4=-b*t.*sin(w*t)-c*2*t.*sin(2*w*t);
    J=[ones(7,1) cos(w*t) cos(2*w*t) J4];
    dp=-J\f; dpnorm=norm(dp);
    p=p+dp;
    a=p(1); b=p(2); c=p(3); w=p(4);
  end
  a,b,c,w
  F=a+b*cos(w*tt)+c*cos(2*w*tt);  plot(tt,F)

%-----------------------------------------------------------------
% 3a) a=5.9000  b=3.2897  c=-1.3603  w=0.8976  fkvsum=1.0269
% 3b) a=5.8407  b=3.2894  c=-1.1308  w=0.9181  fkvsum=0.0111
```