LÖSNINGAR till Tentamen i Numeriska metoder gk3, 07-10-22

Tentans del 1 är frågor hämtade från ”Femtio teorifrågor”. Här visas lösningsförslag till del 2 (25p).

1. Två modeller

a) Linjär modellanpassning med trigonometriskt polynom, tre obekanta och fem ekvationer i systemet $\mathbf{Aa} \approx \mathbf{y}$. Lös med minstakvadratmetoden (vid handräkning löses $\mathbf{A}^T\mathbf{Aa} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$).

```
x=(1:2:9)';  y=[20 34 32 14 28]';
stem(x,y,':'), hold on
w=2*pi/7;
A=[ones(5,1) cos(w*x) sin(w*x)];
a=A\y
r=y-A*a; felkvsum=r'*r
X=0:0.1:9;
F=a(1)+a(2)*cos(w*X)+a(3)*sin(w*X);
plot(X,F,'r')
```

b) Koefficienterna till fjärdegradspolynomet $P(x)$ erhålls genom insättning i

$P(x) = c_1+c_2(x-1)+c_3(x-1)(x-3)+c_4(x-1)(x-3)(x-5)+c_5(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$

$x = 1 : \; c_1 = 20$

$x = 3 : \; c_1 + c_2 \cdot 2 = 34 \implies c_2 = 7$

$x = 5 : \; c_1 + c_2 \cdot 4 + c_3 \cdot 4 \cdot 2 = 32 \implies c_3 = -2$

$x = 7 : \; c_1 + c_2 \cdot 6 + c_3 \cdot 6 \cdot 4 + c_4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 14 \implies c_4 = 0$

$x = 9 : \; c_1 + c_2 \cdot 8 + c_3 \cdot 8 \cdot 6 + c_4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 + c_5 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 28 \implies c_5 = 1/8$

$P(6) = 20 + 7 \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot 3 + 0 + \frac{1}{8} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-1) = 23\frac{1}{8}$

2. Mötespunkt

Skärningspunkten (x, y) finns på varje cirkel: $(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 = (R_i + s)^2$.
Vi får ett ickelinjärt ekvationssystem med tre obekanta x, y och s som förstås löses med Newtons metod. Ur figuren anas att skärningspunkten finns ungefär vid $x = 4$, $y = 1$ och att s är cirka en halv.

```
clear, clf
v=0:2*pi/60:2*pi;
cv=cos(v); sv=sin(v);
a=[1 4 5]'; b=[1 4 0]'; R =[2.4 1.7 1.2]';
for j=1:3
 fill(a(j)+R(j)*cv, b(j)+R(j)*sv,'y'), hold on
end
x=4; y=2; s=0.5;
dcnorm=1;
while dcnorm>1e-12
  f=(x-a).^2+(y-b).^2-(R+s).^2;
  J=2*[x-a  y-b  -(R+s)];
  dc=-J\f; dcnorm=norm(dc)
  x=x+dc(1); y=y+dc(2); s=s+dc(3);
end
pkt=[x y], s
plot(a,b,'p', x,y,'ro')
for j=1:3
 plot(a(j)+(R(j)+s)*cv, b(j)+(R(j)+s)*sv,'-.')
end
axis equal, axis off
```

3. Kändisproblem

Skriv en funktion för ode-systemet:

```
function f=stalker(t,u)
   x=u(1); y=u(2);  g=(1-x)*sin(t)-y*cos(t);
   f=g*[1-cos(t)-x  sin(t)-y]';
```

Här beräknas beundrarens bankurva med RK2 (även kallad Heuns metod):

```
% kandisproblem
  t=0:2*pi/60:2*pi;
  plot(1-cos(t), sin(t)), hold on, axis equal
  plot([-1 0],[0 0],'m', [-1 0],[0 0],'s')
  t=0; u=[-1 0]'; T=t; U=u'; tslut=2*pi;
  h=2*pi/60;
  while t<tslut-h/2
    f1=stalker(t,u);
    f2=stalker(t+h, u+h*f1);
    u=u+h/2*(f1+f2);  t=t+h;  T=[T; t]; U=[U; u'];
  end
  plot(U(:,1),U(:,2))
```

4. Beundrarens bézierbana

```
  t=(0:0.05:1)';
  F=[(1-t).^3 3*t.*(1-t).^2  3*t.^2.*(1-t) t.^3];
% Bézierkurva från p1 till p2  (inte nödvändig att göra)
  p1=[-1 0]; p2=[0.69 0.72];
  k1=[1 0];        % kurvan startar horisontellt
  k2=[1 0];        % horisontell riktning vid maxpunkten p2
  b1=p1+0.4*k1; c1=p2-0.75*k2;  % styrpunktsavstånd genom prövning
  pbcp=[p1; b1; c1; p2];
  r=F*pbcp; plot(r(:,1),r(:,2),'r:')

% Bézierkurva från p2 till p3 (ska göras)
% I p3 ser P kändisen Q som då är i origo =>  k3=[0 0]-p3
% P:s avstånd till Q är 1   =>  norm(k3)=1, bra!
  p3=[0.95 -0.31];  k3=-p3;
  b2=p2+1*k2;  c2=p3-0.67*k3;  % lagom styrpunktsavstånd via figur
  pbcp=[p2; b2; c2; p3];
  plot(pbcp(:,1),pbcp(:,2),'-.')
  r=F*pbcp; plot(r(:,1),r(:,2),'r:')
```