

2D1240, 2D1241, Tentamen i Numeriska metoder gk2 och gk3**Tisdag 24 oktober 2006 kl 14–17**

Betygsgränser (inkl bonuspoäng): 20p trea, 26p fyra, 32p femma.

Hjälpmedel i del 2 är *rosa formelsamlingen* som får tas fram när del 1 har lämnats in.**DEL 2** (25 poäng)**1. Muffinsfrosseri**

Det finns tre typer av muffins: heritemuffins, béziermuffins och kompaktmuffins som alla volymmässigt är ungefär lika stora. Pappersformarna som de ligger i har höjden $h_f = 3.5$ cm, bottenradien $r_1 = 2.5$ och övre radien $r_2 = 3.7$ cm.

Alla muffins är snyggt rotationssymmetriska kring z -axeln och genereras för $z \geq h_f$ av var sin kurva i xz -planet.

a) Toppig heritemuffins

- (3p) En heritemuffins har höjden $H = 7.5$ cm. Toppdelen skapas via hermiteinterpolation av en kurva med lutningen noll i punkten $(0, H)$ och med negativ 45° -lutning i punkten (r_2, h_f) . Handräkna fram hermite-uttrycket för $z(t)$ och $x(t)$.

b) Nästan lika toppig béziermuffins (kan göras utan att a-uppgiften lösts.)

- (3p) En béziermuffins har också $H = 7.5$ men den genereras av en kubisk bézierkurva mellan $(0, H)$ och (r_2, h_f) och med styrpunkter $(r_2/2, H)$ och $(r_2/2, 16/3)$. Skriv en algoritm (gärna i Matlab) som beräknar och ritar upp bézierkurvan i xz -planet.

c) Béziermuffinsvolym (kan lösas utan att uppgifterna ovan lösts).

- (3p) Volymen av en muffins är dels pappersformens volym $\frac{\pi h_f}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$, dels toppdelens volym som utgörs av integralen $V_{\text{topp}} = -\pi \int_0^1 (x(t))^2 z'(t) dt$.

Skriv en algoritm som beräknar volymen av en béziermuffins. Använd trapetsregeln med en extrapolation för toppdelen (bestäm själv lämpligt antal steg).

Du får utnyttja att bézieruttrycket kan skrivas

$$x(t) = r_2(1.5t - 1.5t^2 + t^3) \text{ och } z(t) = 7.5 - 6.5t^2 + 2.5t^3.$$

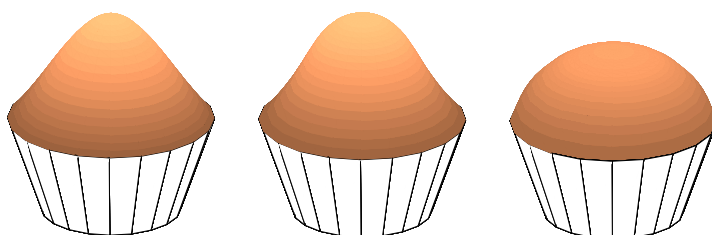
(Beräkningarna ger $V_{\text{topp}} = 70.76$; total muffinsvolym är 177.75 cm^3).

- (3p) **d) Hur hög är en kompaktmuffins?** (Kan göras utan att uppgifterna ovan lösts).

Önskemålet är att muffinsvolymen ska överensstämma med béziermuffinsvolymen. För en kompaktmuffins kan kakan ovanför pappersformen betraktas som ett klotsegment. Låt q beteckna höjden av klotsegmentet. Dess volym bestäms av uttrycket $V(q) = \frac{\pi q}{6}(3r_2^2 + q^2)$ som alltså ska vara lika med V_{topp} -värdet i uppgift c.

Skriv en algoritm som med Newton-Raphsons metod löser ekvationen $V(q) = V_{\text{topp}}$ med stor noggrannhet och som skriver ut hela höjden $H = h_f + q$ för vår kompakta muffins.

Heritemuffins, béziermuffins och kompaktmuffins



2. Randvärdesproblem med FDM

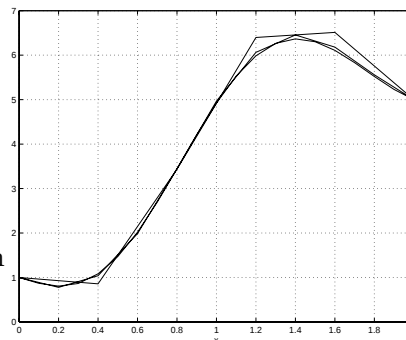
Bilden visar lösningen $y(x)$ till

$$y'' + 2xy' - 0.5y = 20 \sin \pi x, \quad y(0) = 1, \quad y(2) = 5$$

då finitadifferensmetoden utnyttjas med $N = 5$,
 $N = 10$ och $N = 20$ intervall.

(5p)

Härled (för allmänt N -värde) det ekvationssystem som uppstår för beräkning av y -värdena.



Studera sedan speciellt fallet $N = 5$. Ange de numeriska värdena för alla element i matrisen i vänsterledet och uttrycken för högerledets komponenter.

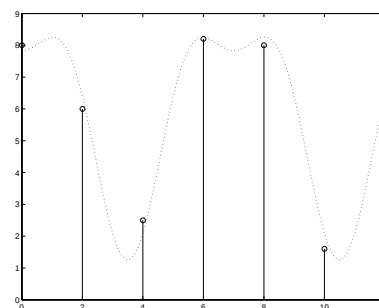
3. Modellanpassning

t	0	2	4	6	8	10	12
y	8.0	6.0	2.5	8.2	8.0	1.6	7.0

Till tabellvärdena vill vi anpassa en periodisk modellfunktion $F = a + b \cos \omega t + c \cos 2\omega t$, där $\omega = 2\pi/T$. Perioden tycks vara ungefär $T = 7$, det innebär att vinkelfrekvensen är $\omega \approx 2\pi/7$.

(4p)

a) Skriv en algoritm (gärna i Matlab) som med minstakvadratmetoden och $\omega = 2\pi/7$ bestämmer parametrarna a , b , c .



Algoritmen ska också beräkna residualvektorn och felkvadratsumman samt rita upp mätdata tillsammans med den erhållna modellfunktionskurvan (kurvan i figuren).

(4p)

b) Som synes i figuren är anpassningen inte helt bra — ω -värdet bör nog justeras. Låt därför ω vara obekant i modellfunktionen $F = a + b \cos \omega t + c \cos 2\omega t$, som alltså nu har fyra obekanta.

Visa hur man går tillväga för att lösa detta modellanpassningsproblem. Låt algoritmen även här rita upp den erhållna lösningskurvan.