

DN1241, Tentamen i Numeriska metoder gk3

Måndag 22 oktober 2007 kl 10–13

Betygsgränser (inkl bonuspoäng): 20p E, 23p D, 26p C, 29p B, 32p A.

(17–19p ger FX, komplettering till E kan göras.)

Hjälpmedel i del 2 är *rosa formelsamlingen* som får tas fram när del 1 har lämnats in.**DEL 2** (25 poäng)**1. Två modeller**

Fem tabellpunkter är givna:

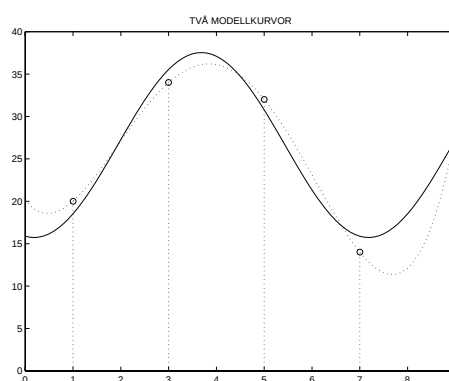
x	1	3	5	7	9
y	20	34	32	14	28

 och det gäller att med en lämplig modell kunna bestämma mellanliggande värden.

a) Adam anser att minstakvadratanpassning med den periodiska modellfunktionen

$$F(x) = a_1 + a_2 \cos \omega x + a_3 \sin \omega x$$

- (4p) med $\omega = 2\pi/7$ bör passa rätt bra.
Skriv en algoritm (gärna i Matlab) som bestämmer koefficienterna, beräknar felkvadratsumman och ritar upp de givna punkterna tillsammans med modellkurvan i intervallet $0 \leq x \leq 9$.



- (4p) b) Bettan har fått veta att tabellvärdena är givna exakt, därför bör ett polynom $P(x)$ som passerar genom alla fem punkterna vara lämplig modell.
Newtons interpolationsansats för polynomet är

$$P(x) = c_1 + c_2(x-1) + c_3(x-1)(x-3) + c_4(x-1)(x-3)(x-5) + c_5(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

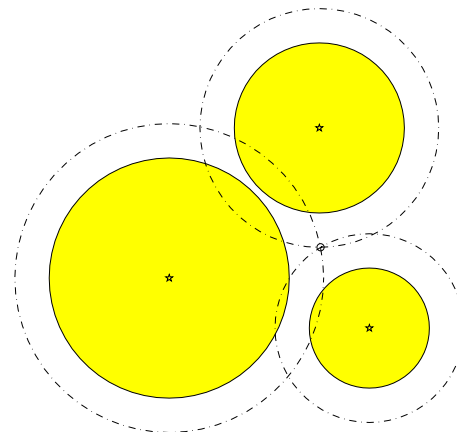
Beräkna polynomets koefficienter med handräkning och ange polynomvärdet $P(6)$.

2. Mötespunkt

- (7p) Givet är tre cirklar med centrum i $(1, 1)$, $(4, 4)$, $(5, 0)$ och med radierna 2.4, 1.7 resp 1.2 (de fyllda cirkelarna i figuren).

Som vi kan se överlappar de inte, men det finns en begäran att varje cirkels radie ska ökas med storheten s så att de får en gemensam skärningspunkt. För att bestämma s -värdet och skärningspunktens koordinater måste ett icke linjärt ekvationssystem lösas. Skriv en effektiv algoritm som löser problemet och ritar upp de nya större cirkelarna.

En cirkel med centrum i (a_i, b_i) och radien $R_i + s$ har ekvationen $(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 = (R_i + s)^2$, nej förresten, jag stoppar här för fortsättningen ska du kunna.



Vänd!

3. Kändisproblem

Kändisen Q tar en runda medsols på cirkeln $(1 - \cos t, \sin t)$. Beundraren P befinner sig i punkten $(-1, 0)$ när hon vid $t = 0$ får syn på Q (som just passerar origo).

P bestämmer sig för att följa efter Q, hela tiden på avståndet 1 och med sikte rakt på idolen Q. Figuren nedan visar Q:s cirkelbana och den bankurva som P samtidigt rör sig på medan Q hinner ett varv $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

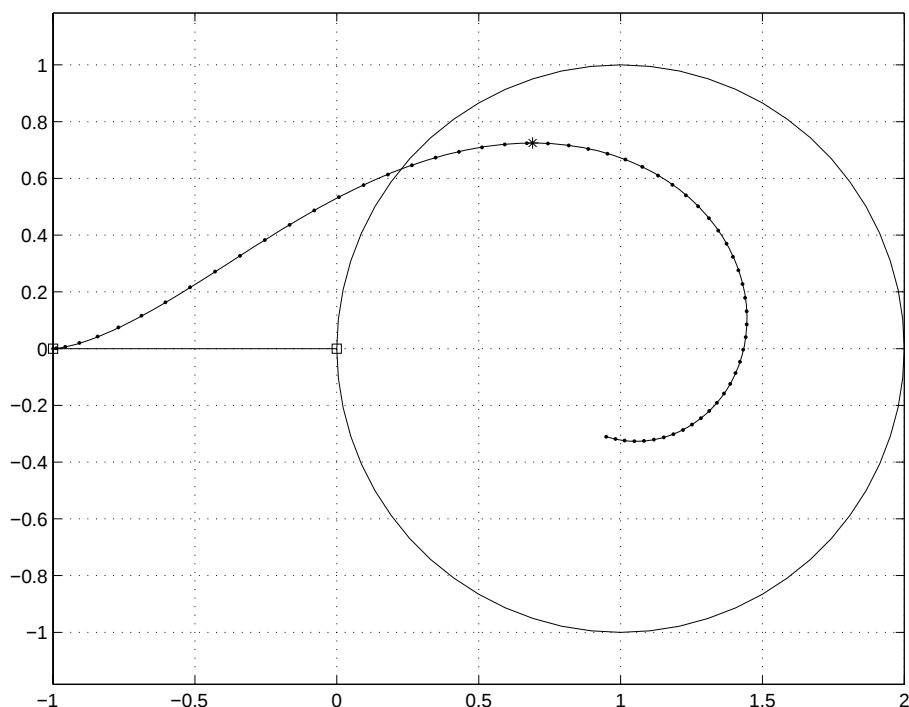
(6p) Rörelsen för P beskrivs av ett differentialekvationssystem:

$$dx/dt = g(t, x, y)(1 - \cos t - x), \quad dy/dt = g(t, x, y)(\sin t - y)$$

där $g(t, x, y) = (1 - x) \sin t - y \cos t$. Begynnelsevärden: $x = -1$ och $y = 0$.

Skriv ode-systemet på vektorform (gärna i en funktion som kan anropas i ode45 eller i en egen RK2 eller RK4).

Skriv sedan några rader (gärna i Matlab) som med RK2 eller RK4 eller ode45 beräknar och ritar P:s bankurva medan kändisen promenerar ett varv på sin bana.



4. Beundrarens bézierbana

(4p) Det skulle passa bra att få en matematisk beskrivning i form av tredjegradsuttryck för P:s bankurva i figuren ovan. Pröva med två kubiska bézierkurvor; den första från $\mathbf{p}_1 = (-1, 0)$ till kurvans maxpunkt $\mathbf{p}_2 = (0.69, 0.72)$.

Den andra bézierkurvan går från $\mathbf{p}_2$ till slutpunkten $\mathbf{p}_3 = (0.95, -0.31)$ där kurvan är riktad rakt mot origo (P kollar ju in Q som då hunnit runt cirkelbanan). Riktningsektorn är därför $-\mathbf{p}_3$.

Gör en konstruktionsskiss som visar på ett ungefär var styrpunkterna ska ligga. Det räcker att göra det för bézierkurva nummer två. Ange också det matematiska uttrycket för bézierkurvan med dina numeriska värden insatta.