

## DN1241 och DN1243

## Femtio teorifrågor i numeriska metoder

1. Om relativa felet i ett närmevärde är cirka en promille, vad vet man då om antalet korrekta siffror? Antalet korrekta decimaler?
2. Om  $a$  har fyra korrekta siffror, hur många korrekta siffror har  $1024a$ ?
3. Man vill beräkna värdet av  $\sqrt{1+t^3}-1$  för  $t \approx 10^{-5}$ . Vilket av de matematiskt ekvivalenta uttrycken  $\sqrt{1+t^3}-1$  och  $t^3/(\sqrt{1+t^3}+1)$  bör man välja och varför? Ge något alternativt beräkningsförslag.
4. Om  $p$  och  $q$  har relativfel på högst 0.005, vad kan då sägas om relativa felet i  $pq$  och i  $p+q$ ? Är någon av beräkningarna illakonditionerad för vissa  $p$  och  $q$ ? Om ja, ange vilken beräkning och vilka  $p$  och  $q$  det gäller.
5. Ett komplicerat beräkningsuttryck med storheter  $a$ ,  $b$  och  $c$  ger resultat  $y$ . Indata har felgränser  $a \pm 0.01$ ,  $b \pm 0.02$ ,  $c \pm 0.03$ . Hur kan man med experimentell störningsräkning skatta felet i  $y$ ?
6. Uttrycken  $\pi^2 + \pi x + x^2$  och  $(\pi^3 - x^3)/(\pi - x)$  är matematiskt lika men om räknedosan beräknar värdet för  $x = 3.14$  ger det ena högre noggrannhet. Vilket, varför, och vad kallas fenomenet?
7. Konditionstalet för ett problem ligger runt 10000. Hur många korrekta siffror måste indata ha för att lösningen ska få fyra siffrors noggrannhet?
8. Hur definieras maximumnormen för en vektor och för en matris? Hur definieras euklidiska normen för en vektor? Om vektorn  $\mathbf{x}$  och matrisen  $\mathbf{A}$  båda har normen 75, vad vet man om normen för  $\mathbf{Ax}$ ?
9. Vad är konditionstalet för en diagonalmatris med diagonalelementen  $d_k = 2/k$  för  $k = 1, 2, \dots, 40$ ?
10. Om ett ekvationssystem med fylld systemmatris och 50 obekanta tar tio millisekunder att lösa, hur lång tid ungefär tar det att lösa ett liknande system med 500 obekanta? Med 1000 obekanta?
11. Om lösningen av ett tridiagonalt system med 100 obekanta tar 0.2 sekunder, hur lång tid tar effektiv lösning av ett tridiagonalt system med 1500 obekanta? Man kan undvika att lagra hela matrisen, hur mycket vinner man i lagringsutrymme i det stora systemet ovan?
12. Beskriv egenskaper hos inversen till en högertriangulär matris; inversen till en symmetrisk tridiagonal matris.
13. Bestäm minstakvadratlösningen till  $c_1 - c_2 \approx 2$ ,  $c_2 \approx 2$ ,  $c_1 + c_2 \approx 12$ .
14. Vad är det som minimeras vid minstakvadratanpassning? Vad menas med normalekvationerna? Vilken ortogonal egenskap finns i lösningen?

15. Minstakvadratanpassning med en parabel görs till givna mätdata vid  $x$ -värdena 113, 115, 117, 119, 121. Varför bör man välja en centrerad ansats? Hur ser det överbestämde systemet ut?
16. Vad menas med ett trigonometriskt polynom? I vilka sammanhang vill man använda ett sådant vid kurvanpassning?
17. Vilket vållar mest problem vid minstakvadratmetoden på ett överbestämt system  $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{b}$ , att raderna i matrisen är linjärt beroende eller att kolumnerna är linjärt beroende?
18. Ange naiva ansatsen och Newtons ansats för ett interpolerande polynom som har värden givna vid  $x = -3, 5, 10, 17$ . Hur erhålls koefficienterna?
19. Polynomvärden beräknas elegant med Horners metod. Hur går det till?
20. Man vill lägga ett polynom genom tabellpunkterna: (2008.2, 5.2), (2008.5, 4.0), (2009.0, 3.5), (2009.4, 3.2). Diskutera olika ansatser och motivera bästa val.
21. Varför bör man undvika interpolation med polynom av högt gradtal vid ekvidistanta interpolationspunkter? Tänkbara åtgärder?
22. Man vill interpolera mellan två givna punkter med givna lutningar. Vilken grad ska polynomet ha? Vad kallas förfarandet?
23. Vad menas med kubiska splines? Med naturliga kubiska splines? Berätta kort om beräkningsgången.
24. Om man vid åtta givna punkter flyttar den tredje i höjddled, förklara var interpolationskurvan förändras om algoritmen är
  - a) kubiska splines,
  - b) hermiteinterpolation med centraldifferenskvot ?
25. Hur definieras kvadratiske och kubiska bézierkurvor? Beskriv geometriska egenskaper i ord och bild.
26. Man har givet nio punkter i planet och vill dra en mjuk sluten kurva genom dem. Föreslå och motivera metod.
27. Av vilken noggrannhetsordning är approximationerna framåt- resp centraldifferenskvot till derivatan? Härled med hjälp av taylorutveckling!
28. När kan richardsonextrapolation förbättra resultat av numeriska beräkningar? Exemplifiera.
29. Beskriv trapetsregeln för integralberäkning med formel och figur.
30. Vid oändligt integrationsintervall kan inte en numerisk metod användas direkt. Hur gör man?
31. En periodisk funktion ska integreras över en hel period. Föreslå och motivera metod!
32. Vilken svårighet stöter man på vid beräkning av integralvärdet då funktionen  $f(x) = 1/\sqrt{4x + x^3}$  integreras från 0 till 1 ? Föreslå åtgärd.

33. Hur erhålls noder och vikter i tvåpunktsformeln  $G_2$  vid gausskvadratur för approximation av  $\int_{-1}^1 f(x)dx$  ?  
 Visa att  $\int_0^6 \frac{\sin(t^2/12)}{1+t} dt$  approximeras av  $G_2 = 3\left(\frac{\sin(1-\sqrt{3}/2)}{4-\sqrt{3}} + \frac{\sin(1+\sqrt{3}/2)}{4+\sqrt{3}}\right)$ .
34. Ekv  $x^5 = x + 1$  har en rot mellan 1 och 2. Hur många intervallhalveringar behövs för att bestämma roten med sex decimalers noggrannhet?
35. Newton-Raphsons metod för ekvationslösning har kvadratisk konvergens. Vad innebär det om felet i två påföljande iterationer? Vad innebär det för antalet korrekta decimaler?
36. Visa i en figur hur Newton-Raphsons metod fungerar. Visa också när konvergensproblem kan uppstå. Inträffar det bara vid startvärdet?
37. Beskriv sekantmetoden med ord och bild. När konvergerar metoden och när kan man råka ut för divergens?
38. Hur många startvärden krävs i sekantmetoden? Hur många funktionsberäkningar i varje iterationssteg? Ange en nackdel och en fördel hos sekantmetoden i jämförelse med Newton-Raphsons metod.
39. Härled kvadratiska konvergensens egenskaper hos Newton-Raphsons metod för enkelrötter. Vad händer med konvergensen vid en dubbelrot?
40. Ett diagonaltungt system  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  kan skrivas om och lösas iterativt. Vad innebär diagonaltungt och hur görs omskrivningen?
41. Beskriv detaljerat Newtons metod för lösning av icke-linjära ekvationssystem.
42. Formulera ett icke-linjärt modellanpassningsproblem och beskriv kortfattat lösningsmetoden.
43. Vad är en unimodal funktion? Beskriv hur man effektivt hittar minimum (maximum) till en sådan.
44. Hur skriver man differentialekvationen  $y''' - t^2 y'' + y'/2 + y^2/(1+t) - 1 = 0$  i vektornotation så att den blir av första ordningen?
45. Runge-Kuttas metod (RK4) är bättre än Eulers metod, fjärde noggrannhetsordningen jämfört med första, säger man. Vad menar man med det?
46. Vad menas med lokala trunkeringsfelet och globala trunkeringsfelet vid numerisk lösning av ODE? Exemplifiera på Eulers metod.
47. Hur går man praktiskt tillväga för att undersöka tillförlitligheten i ett rungekuttaresultat?
48. Vad menas med en explicit metod respektive en implicit metod för lösning av begynnelsevärdesproblem?
49. Formulera ett begynnelsevärdesproblem (BP) och ett randvärdesproblem (RP) för en ODE. Ange två metoder för numerisk behandling av RP.
50. Vad menas med att en numerisk metod för ett begynnelsevärdesproblem är stabil för ett visst steg  $h$ ?