Övninsexempel i PDE

1. Betrakta problemet

$$-u''(x) = f(x), \qquad \text{för } 0 < x < 1,$$
$$u(0) = 0,\ u'(1) = 0.$$

   a) Skriv upp en variationsformulering i ett lämpligt valt funktionsrum till detta problem.
   b) Formulera en finit elementmetod för det givna problemet utgående från variationsformuleringen i (a).
   c) Härled en a priori feluppskattning i energinorm för finita elementlösningen i (b).
   d) Härled en a posteriori feluppskattning i energinormen för finita elementlösningen i (b).

2. Visa att för $u(x,t)$ sådan att $u(x,0) = u_0(x)$, $0 < x < 1$ och

$$\dot{u} - u'' = 0,\ 0 < x < 1,\ t > 0, \quad u(0,t) = u'(1,t) = 0,\ t > 0,$$

gäller att a) $\|u\|$ och b) $\|u'\|$ avtar med tiden t. c) Visa att $\|u'\| \to 0$ då $t \to \infty$. Gäller samma sak för $\|u\|$? d) Ge en fysikalisk tolkning av a) - c).

3. Betrakta problemet $\ddot{u} - u'' = 0$ för $x \in R$, $t > 0$, $u(x,0) = u_0(x)$ och $\dot{u}(x,0) = v_0(x)$ för $x \in R$.

   Bestäm/plotta $u(x,2)$, dvs lösningen vid tiden $t = 2$, om

   a) $u_0(x) = 1$, för $x < 0$, $u_0(x) = 0$, för $x > 0$, och $v_0 = 0$.
   b) $u_0 = 0$, $v_0(x) = -1$, för $-1 < x < 0$, $v_0(x) = 1$, för $0 < x < 1$ och $v_0(x) = 0$, för $|x| > 0$.
   c) Ange/plotta begynnelsevärden $u_0(x)$ för vilka $u(x,2) = 1$, för $-1 < x < 1$ och $u(x,2) = 0$, annars, om $v_0 = 0$.

4. Betrakta problemet $\dot{u} - u'' = f$ för $0 < x < 1$, $t > 0$, $u(x,0) = u_0(x)$ för $0 < x < 1$ och $u(0,t) = 0$ och $u'(1,t) = 0$ för $t > 0$.

   Visa genom att multiplicera ekvationen för u med u resp $\dot{u}$ att

   a) $\|u(\cdot,t)\| \le \|u_0\| + \int_0^t \|f(\cdot,s)\| ds$
   b) $\|u'(\cdot,t)\|^2 \le \|u_0'\|^2 + \int_0^t \|f(\cdot,s)\|^2 ds$.
   c) Ge en fysikalisk tolkning av problemet i fallet $f = 20 - u$, dvs av ekvationen $\dot{u} - u'' + u = 20$ och de angivna randvillkoren.

5. a) Visa att för $u(x,t)$ så att $u(x,0) = 0$ för $0 < x < 1$, $u'(0,t) = u(1,t) = 0$ för $t > 0$, och $\dot{u} - \epsilon u'' = f$, för $0 < x < 1$, $t > 0$, där ϵ är en positiv konstant och $f = f(x,t)$, gäller att $\|u(\cdot,t)\| \le \int_0^t \|f(\cdot,s)\| ds$. Tips: $\int_0^1 \dot{u} u dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 = \|u\| \frac{d}{dt}\|u\|$.

b) Visa att för lösningen $u = u(x)$ till motsvarande stationära (tidsoberoende) problem gäller $\|u'\| \leq \frac{1}{\epsilon}\|f\|$. tips: Utnyttja en uppskattning som den i uppgift 17c nedan.

6. Bestäm lösningen till vågekvationen $\ddot{u} - c^2 u'' = f$, $x > 0$, $t > 0$, med begynnelse och randvillkoren

$$u(x,0) = u_0(x),\ \dot{u}(x,0) = v_0(x),\ x > 0, \quad u'(0,t) = 0,\ t > 0,$$

i fallen a) $f = 0$, b) $f = 1$, $u_0 = 0$, $v_0 = 0$.

7. Betrakta problemet att hitta $u = u(x,t)$ bestämd av

$$\dot{u} = f - q', \quad \text{där } q = -au', \quad \text{dvs } \dot{u} - (au')' = f,$$

för $0 < x < 1$, $t > 0$, $u(0,t) = 0$ och $q(1,t) = 0$ för $t > 0$, och $u(x,0) = u_0(x)$ för $0 < x < 1$, där f och $a > 0$ är givna funktioner av x och t.

a) Ge en fysikalisk tolkning av problemet. Ange speciellt vad u, a, q och f kan tänkas representera.

b) Härled/motivera ekvationerna för $\dot{u}$ resp. q för $0 < x < 1$, $t > 0$.

c) Formulera ett motsvarande problem med fler än en rumsdimension. För tydlighets skull: skriv ut alla partiella derivator på formen $\frac{\partial w}{ds}$.

8. Låt $u = u(x,t)$ vara en lösning till $\ddot{u} + b\dot{u} - u'' = 0$ för $0 < x < 1$, sådan att $u(0,t) = 0$ och $u(1,t) = 0$, där $b \geq 0$.

a) Vilken situation kan dessa ekvationer tänkas modellera, och vad motsvarar de olika termerna i differentialekvationen?

b) Visa att det finns en naturlig energi associerad med u, som bevaras med t om $b = 0$ och som avtar med växandet t om $b > 0$.

9. Betrakta följande ekvation

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1, \ \text{ i } \Omega \\ u &= 0, \ \text{ på } \Gamma, \end{aligned}$$

där Ω är fyrkanten $\{x = (x_1, x_2) : 0 < x_1 < 2, 0 < x_2 < 2\}$ med rand Γ.

a) Skriv upp det diskreta systemet (Styvhetsmatris och lastvektor) om problemet diskretiseras mha FEM med styckvis linjära basfunktioner på en triangulering som i 9a:

b) Gör samma sak som i deluppgift (a) om randvillkoret $u = 0$ byts ut mot ett Neumann villkor $n \cdot \nabla u = 0$ på $x_1 = 2$, och $0 < x_2 < 2$.

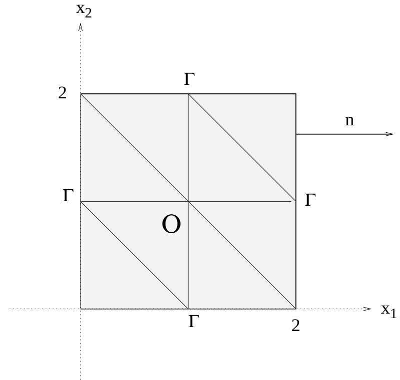

Figure 1:

10. a) Beskriv $cG1cG1$-metoden för approximativ, numerisk lösning av ekvationerna i uppgift 2. Beskrivningen ska vara klar och komplett men ändå kortfattad och leda fram till ett ekvationssystem för beräkning av tidsutvecklingen av lösningen. Hur modiferas det resulterande ekvationssystemet om (svar räcker) randvillkoret

    b) $u'(1,t) = 0$ ersätts med $u'(1,t) = 7$

    c) $u(0,t) = 0$ ersätts med $u(0,t) = 7$.

11. a) Beskriv $dG0cG1$-metoden för approximativ, numerisk lösning av ekvationerna i uppgift 5a. Beskrivningen skall helst vara kort och koncis, men ändå ”komplett”, och leda fram till ett ekvationssystem för beräkning av tidsutvecklingen av lösningen i fallet $\epsilon = 1$ och $f(x,t) = t$.

    b) Hur modiferas det resulterande ekvationssystemet om (svar räcker) randvillkoret $u'(0,t) = 0$ ersätts med $u(0,t) = 7$.

12. Formulera en lämplig finit elementmetod för problemet i uppgift 7, med $a = 1 + x$ och $f = 1$. Metoden skall reduceras till ett ekvationssystem för beräkning av tidsutvecklingen av lösningen.

13. Betrakta problemet

$$-\Delta u = f, \quad \text{i } \Omega, \qquad u = 0, \quad \text{på } \Gamma,$$

där Ω är rektangeln $\{(x_1, x_2) : -1 < x_1 < 2, 0 < x_2 < 2\}$ med rand Γ, och där $f = 1$ för $x_1 < 0$, $f = 2$ för $x_1 > 0$.

    a) Skriv upp det diskreta systemet (Styvhetsmatris och lastvektor) om problemet diskretiseras mha FEM med styckvis linjära basfunktioner på trianguleringen i 13a:

    b) Gör samma sak som i deluppgift (a) om randvillkoret $u = 0$ byts ut mot ett Neumann villkor $n \cdot \nabla u = 0$ på $x_1 = 2$, och $0 < x_2 < 2$.

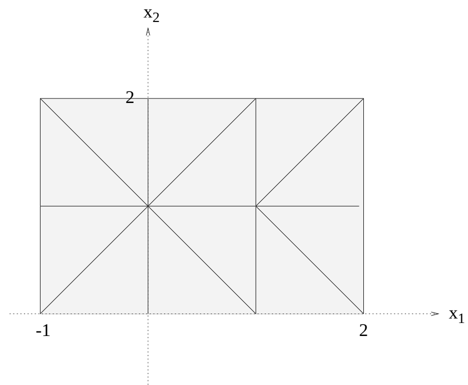

Figure 2:

14. Visa att för u som i uppgift 7 med $a = 1$ och $\|u\| = \|u(\cdot, t)\|$ gäller,

    om $f = 0$:

    a) $\dfrac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\|u'\|^2 = 0$, b) $\|u(\cdot, t)\| \leq e^{-t}\|u_0\|$.

    Tips: Visa med hjälp av a) och olikheten $\|u\| \leq \|u'\|$ att $\frac{d}{dt}(\|u\|^2 e^{2t}) \leq 0$ som integreras

    om $f = f(x)$:

    c) $\|u - u_s\| \to 0$ då $t \to \infty$,

    där $u_s = u_s(x)$ är lösningen till motsvarande stationära problem

    $$-(au')' = f \text{ för } 0 < x < 1, \quad u(0) = 0 \text{ och } u'(1) = 0.$$

    Tips: Tillämpa b) på $w = u - u_s$ som ju satisfierar $\dot{w} - (aw')' = 0$.

15. Formulera $cG1cG1$ metoden för problemet i uppgift 4 med $f = 20 - u$ som i 4c. Redovisningen skall leda fram till ett ekvationssystem för beräkning av tidsutvecklingen av lösningen. Det skall framgå hur detta kommit till och är definierat, men detaljerna i uträkningen av koefficienterna kan utelämnas.

16. Härled en partiell differentialekvation som beskriver värmeldning i ett homogent och isotropt medium. Hur modifieras ekvationen om materialet är anisotropt så att värme leds dubbelt så bra i x_1-riktningen som i x_2-riktningen. Beskriv några olika typer av randvillkor.

17. Låt u vara lösningen till $-\Delta u = f$ i Ω, $u = 0$ på randen till Ω, där $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ och f är en given funktion på Ω.

    a) Visa att $\|D^2 u\| = \|\Delta u\| = \|\Delta u\|$, dvs speciellt att $\|D^2 u\| \leq \|f\|$, där $(D^2 u)^2 = u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2$.

b) Visa att samma resultat gäller om $n \cdot \nabla u = 0$ på randen (istället för $u = 0$).

c) Visa i fallet med randvillkoret $u = 0$ att $\|u\| \leq C_\Omega \|\nabla u\|$. Tips: Tag en funktion ϕ sådan att $\Delta\phi = 1$ och utgår från $\int_\Omega u^2 \Delta\phi dxdy$.

18. Visa att Poissonproblemet i uppgift 17 kan formuleras som ett visst ekvivalent minimeringsproblem.

19. Låt u vara lösningen till $-\Delta u = f$ i Ω, $u = 0$ på randen till Ω, där Ω är ett givet område i planet och f en given funktion på Ω, och låt U vara motsvarande finita elementlösning på en triangulering av Ω med elementdiameter $h = h(x)$. Härled uppskattningar av felen a) $\|\nabla(u - U)\|$ och b) $\|u - U\|$. Regularitets och interpolationsfeluppskattningar som kan komma till avnändning behöver ej bevisas.

20. a) Formulera en finit elementmetod för problemet i uppgift 17. Specificera en triangulering och motsvarande styvhetsmatris och lastvektor i fallet $f = 1$.

    b) Hur många räkneoperationer behövs för att lösa det resulterande ekvationssystemet med Gausselimination om elementsidlängden är h? Motivera!

21. Betrakta problemt att hitta $u = u(x_1, x_2)$ sådan att

$$-\Delta u = f \text{ i } \Omega, \quad u = 0 \text{ på } \Gamma = \partial\Omega,$$

där Ω är det "husliknande" området i figuren och $\Gamma = \partial\Omega$ dess rand.

a) Beräkna styvhetsmatris och lastvektor för problemet i fallet $f = 1$ med styckvis linjär finit elementapproximation och en triangulering av Ω enligt figur 21.

b) Ange en uppskattning av a posteriori typ för energinormsfelet för den approximativa lösningen.

c) Hur ser motsvarande uppskattning ut för L_2-normen av felet?

d) Hur ser motsvarande energinormsuppskattning ut i fallet med styckvis kvadratiska (i stället för linjära) elementfunktioner?

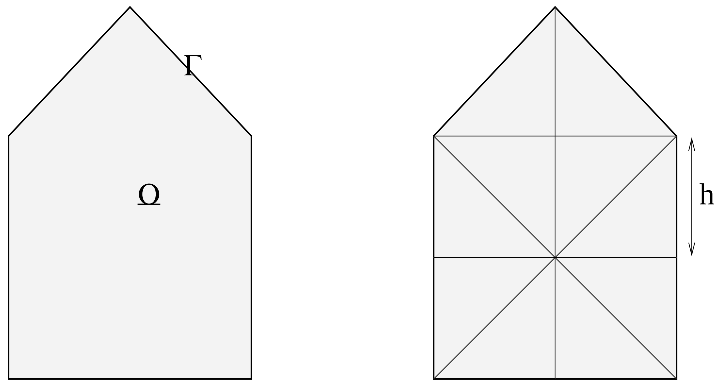

Figure 3:

22. a) Formulera den sats som bl.a. garanterar att problmet i uppgift 21 har en lösning u, och att denna dessutom är entydigt bestämd och stabil (dvs att små ändringar i data f ger små ändringar i lösningen u). b) Visa att satsen verkligen kan tillämpas på problemet i uppgift 21, dvs att förutsättningarna är uppfyllda, samt c) bevisa entydighetsdelen och stabilitetsdelen av satsen.

23. Härled (gärna utgående från d'Alemberts formel i Beta) formler för lösningen till $\ddot{u} = c^2 u''$ för $x > 0$, $t > 0$, $u(x,0) = u_0(x)$ och $\dot{u}(x,0) = v_0(x)$ för $x > 0$, och a) $u(0,t) = 0$, b) $u(0,t) = g(t)$ för $t > 0$.

24. Värmeledningsekvationen kan i fallet med två rumsdimensioner och radiell symmetri skrivas $r\dot{u} - (ru'_r)' = rf$, där $r = |x|$ och $v'_r = \frac{\partial v}{\partial r}$.

    a) Verifiera att $u = \frac{1}{4\pi t}\exp(-\frac{r^2}{4t})$ är en lösning till den givna ekvationen motsvarande $f = 0$ och begynnelsevillkoret $u(r,0) = \delta$, genom att skissera $u(r,t)$ som funktion av r för $t = 1$ och $t = 0.01$, konstatera att $u(r,t) \to 0$ då $t \to 0$ för $r > 0$, och visa att $\int_{R^2} u(x,t)dx = 2\pi \int_0^\infty u(r,t) r dr = 1$, för alla t.

    b) Bestäm en stationär lösningar till den givna ekvationen som svarar mot $f = 1/(\pi\epsilon^2)$ för $r < \epsilon$, $f = 0$ annars, och bestäm sedan (fundamental) lösningen motsvarande $f = \delta$ genom att låta $\epsilon \to 0$.

25. Låt Ω vara ett begränsat område i planet med rand $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ (som i fig 25) och betrakta problemet $\Delta u = 0$, i Ω, $u = 0$, på Γ_D, $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ på Γ_N.

    a) Visa att för en standard Galerkin approximation $U \in V_h$ av u gäller

$$\|\nabla(u - U)\| \leq \|\nabla(u - v)\|$$

för alla $v \in V_h$.

b) Vilken uppskattning gäller för $\|\nabla(u-v)\|$ om $v \in V_h$ är den styckvis linjära interpolanten av u?

c) Härled motsvarande endimensionella interpolationsfeluppskattning.

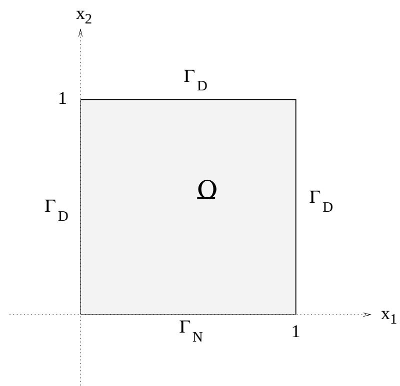

Figure 4:

26. a) Visa att lösningen u till problemet i uppg. 25 minimerar (energin) $F(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - \int_{\Gamma_N} gv$, och att minimum ges av $F(u) = -\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2$. Tips: Sätt $w = v - u$ och visa att $F(v) = F(u+w) = F(u) + \ldots \geq F(u)$.

b) Visa för motsvarande diskreta energiminimum att

$$F(U) = F(u) + \frac{1}{2}\|\nabla(u-U)\|^2.$$

Tips: $\|\nabla(u-U)\|^2 = \int_\Omega \nabla(u-U)\cdot\nabla(u+U) = \|\nabla u||^2 - \|\nabla U\|^2$. Varför?

27. Derive a model for scalar convection-diffusion-absorption in two space dimensions from physical principles.

28. Let $a(\cdot,\cdot)$ be a continuous, V-elliptic, symmetric, bilinear form in the Hilbert space V. Let allso $L(\cdot)$ denote a linear form in V. Show that the following two problems are equivalent

Find $u \in V$ such that:

$$(1) \qquad a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V$$

Find $u \in V$ such that:

$$(2) \qquad F(u) \leq F(v), \quad \forall v \in V$$

where $F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$. Specify where different assumptions are used? Determine the unnecessary assumptions.

29. Prove an a priori and an a posteriori error estimate for a finite element method for the problem a)

$$\begin{aligned} -u'' + u' + u &= f \quad \text{in } (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} -u'' + 2xu' + 2u &= f \quad \text{in } (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

30. Consider the problem

$$-\epsilon u'' + xu' + u = f \quad \text{in } I = (0,1), \quad u(0) = u'(1) = 0,$$

where ϵ is a positive constant, and $f \in L_2(I)$. Prove that

$$\|\epsilon u''\| \leq \|f\|,$$

where $\|\cdot\|$ is the $L_2(I)$-norm.