

Fakultät für Mathematik und Informatik
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit

**Vergleich verschiedener
Finite-Elemente-Approximationen zur
numerischen Lösung der Plattengleichung**

Bärbel Janssen

April 2007

Betreut durch Prof. Dr. Rolf Rannacher

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Notation	5
2.1	Ableitungen	5
2.1.1	Gradient und Divergenz einer Funktion	5
2.1.2	Laplace-Operator und biharmonischer Operator	6
2.2	Funktionsräume	6
2.2.1	Die Räume $C(\bar{\Omega})$, $C^m(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$	6
2.2.2	Der Lebesgue-Raum $L^2(\Omega)$	7
2.2.3	Die Sobolev-Räume $H^m(\Omega)$	7
2.2.4	Polynomräume	8
3	Problemstellung	9
3.1	Theorie der Biegung dünner Platten	9
3.1.1	Potentialtheoretische Methode	10
3.1.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	12
3.1.3	Regularität von Lösungen	14
4	Diskretisierung	19
4.1	Grundlagen	21
4.2	Beispiel eines V -konformen Ansatzes	23
4.2.1	Beschreibung des verwendeten C^1 -Elements, das Bogner-Fox-Schmit- Element	23
4.2.2	Beschreibung des Verfahrens	24
4.2.3	Fehlerabschätzungen	25
4.2.4	Vor- und Nachteile	27
4.3	Beispiel eines nicht V -konformen Ansatzes	27
4.3.1	Beschreibung des verwendeten Adini-Elements	27
4.3.2	Beschreibung des Verfahrens	28
4.3.3	Fehlerabschätzungen	31
4.3.4	Vor- und Nachteile	48
4.4	Interior-Penalty-Verfahren	48
4.4.1	Beschreibung des Verfahrens	49
4.4.2	Fehlerabschätzungen	54
4.4.3	Vor- und Nachteile	57
4.5	Modifiziertes Interior-Penalty-Verfahren basierend auf dem Adini-Element	57

4.5.1	Beschreibung des Verfahrens	58
4.5.2	Fehlerabschätzungen	59
4.5.3	Vor- und Nachteile	60
4.6	Finite Elemente auf nichtkartesischen Zellen	60
5	Numerische Analyse der vorgestellten Verfahren	63
5.1	Bestimmung eines geeigneten Strafparameters für das Interior-Penalty-Verfahren	63
5.2	Konvergenzanalyse	65
5.2.1	Einheitsquadrat	66
5.2.2	L-Gebiet	76
5.2.3	Schlitzgebiet	91
5.2.4	Vergleich und Beurteilung	102
5.3	Aufwandsanalyse	104
5.3.1	Einheitsquadrat	104
5.3.2	L-Gebiet	105
5.3.3	Schlitzgebiet	107
5.3.4	Vergleich und Beurteilung	112
6	Zusammenfassung und Ausblick	115
	Abbildungsverzeichnis	119
	Tabellenverzeichnis	121
	Literaturverzeichnis	125

1 Einleitung

In vorliegender Arbeit werden Verfahren zur Lösung der Plattengleichung

$$\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega, \tag{1.1}$$

mit Randbedingungen

$$\begin{aligned} u = \partial_n u = 0 \text{ auf } \partial\Omega_E, \\ u = M(u) = 0 \text{ auf } \partial\Omega_G, \\ M(u) = N(u) = 0 \text{ auf } \partial\Omega_F, \end{aligned} \tag{1.2}$$

verglichen. Dabei sei

$$M(u) = \Delta u - (1 - \sigma)\partial_t^2 u, \quad N(u) = \partial_n \Delta u - (1 - \sigma)\partial_t^2 \partial_n u.$$

Wir beschränken uns auf die Betrachtung von Polygonegebieten Ω .

Zur Lösung der Plattengleichung mit der Methode der Finiten Elemente (FE) werden für konforme Methoden endlichdimensionale Teilräume von $H^2(\Omega)$ betrachtet. Es ist daher notwendig, dass stückweise polynomiale Funktionen global stetige erste Ableitungen – auch über Kanten der Zerlegung hinweg – haben. Für einen konformen FE-Ansatz sind daher Polynome vom Grad ≥ 3 nötig, damit diese Bedingung erfüllt ist. Wir werden auch den Ansatz verfolgen, geeignete endlichdimensionale Räume zu analysieren, die keine Teilräume von $H^2(\Omega)$ sind. Ein solcher Ansatz liefert sogenannte nichtkonforme Methoden.

Zuerst werden wir ein konformes Verfahren zur Lösung von (1.1) und (1.2) betrachten. Diesem liegt ein Element von Bogner, Fox und Schmit, vgl. (Bogner u. a.), zu Grunde, das stetig differenzierbare Übergänge auch über Zellkanten hinweg ermöglicht. Hierbei werden wir einen Finite-Elemente-Raum erhalten, der ein Teilraum von $H^2(\Omega)$ ist. Das verwendete Element und eine Analyse dazu ist in (Ciarlet 1987) zu finden.

Die Anforderungen an die Differenzierbarkeit wollen wir abschwächen und ein nichtkonformes Verfahren basierend auf dem Adini-Element untersuchen. Dieses Element realisiert nur

Stetigkeit über Kanten der Zerlegung hinweg, nicht aber punktweise stetige Differenzierbarkeit. Damit werden wir als Finite-Elemente-Raum keinen Teilraum von $H^2(\Omega)$ erhalten. Wir werden sehen, dass dieses Verfahren nicht immer mit dem konformen Verfahren vergleichbare Konvergenzordnungen in der L^2 - und der H^1 -Norm liefert. Die Analyse für das Adini-Element ist in (Lauscaux und Lesaint 1975) zu finden.

Als drittes wird obiges Problem (1.1), (1.2) mit einem Interior-Penalty-Verfahren gelöst. Dafür werden wir ein stetiges Element verwenden und die globale stetige Differenzierbarkeit und die Randbedingungen über die variationelle Formulierung erzwingen. Die Einführung von Straftermen sorgt dafür, dass das Verfahren eindeutig lösbar ist. Dieses Verfahren wurde beschrieben in (Brenner und Sung 2005). Wir werden untersuchen, wie die Konditionierung der Matrizen und der Fehler vom Strafparameter abhängen.

Abschließend entwickeln wir ein abgewandeltes Interior-Penalty-Verfahren basierend auf dem Adini-Element. Dies wird die Stetigkeit über das Element realisieren und die stetige Differenzierbarkeit über die Bilinearform erreichen.

Es ist möglich, die Plattengleichung mit gemischten Verfahren zu lösen. Diese Verfahren zur Lösung der Plattengleichung werden in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet. Näheres dazu ist in (Rannacher 2001) und (Braess 1997) zu finden.

Ziel dieser Arbeit ist es, die genannten Verfahren unter verschiedenen Gesichtspunkten zu analysieren und zu vergleichen. Das obige Problem wird auf Gebieten im \mathbb{R}^2 mit Schlitzern oder einspringenden Ecken gelöst. Bei den verwendeten Verfahren werden wir darauf eingehen, ob diese auch bei singulären Lösungen anwendbar sind. Sollte das der Fall sein, sind wir daran interessiert, wie gut die auftretenden Singularitäten in der Lösung von den jeweiligen Methoden reproduziert werden. Außerdem wird der Rechenaufwand der einzelnen Verfahren betrachtet. Dazu wird untersucht, wie viele Freiheitsgrade benötigt werden, um dieselbe Genauigkeit zu erzielen. Außerdem wird analysiert wieviel cpu-Zeit die einzelnen Verfahren benötigen.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 2 werden wir die in dieser Arbeit verwendete Notation einführen und die verwendeten Räume vorstellen. Eine Herleitung der Gleichung und der Randbedingungen wird in Kapitel 3 gegeben. Dort wird auch Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gezeigt. Sehr wichtig für die spätere numerische Berechnung ist die Betrachtung der Regularität von Lösungen. Dazu werden wir die Ergebnisse aus (Melzer und Rannacher 1979) und (Blum und Rannacher 1980) verwenden. Grundlegendes zur Diskretisierung des kontinuierlichen Problems werden wir in Kapitel 4 einführen. Diskrete Ansätze zur Lösung der obigen partiellen Differentialgleichung (1.1) mit entsprechenden Randbedingungen (1.2)

werden in den einzelnen Abschnitten vorgestellt. Zuerst werden wir einen konformen bikubischen Ansatz mit einem C^1 -Element in Abschnitt 4.2 angeben. Danach werden wir einen nichtkonformen Ansatz mit dem Adini-Element in Abschnitt 4.3 diskutieren. Ein weiterer diskreter Ansatz, den wir untersuchen werden, ist das Interior-Penalty-Verfahren. Dies wird in Abschnitt 4.4 analysiert. Abschließend stellen wir ein abgewandeltes Interior-Penalty-Verfahren vor, das auf dem Adini-Element basiert. Dies wird in Abschnitt 4.5 thematisiert. Es werden jeweils die Finiten Elemente mit den zugehörigen Finite-Elemente-Ansatzräumen vorgestellt. Danach führen wir für jedes Verfahren eine Fehleranalyse durch. Abschließend stellen wir für jede Methode die Vor- und Nachteile zusammen, sofern diese dann schon erkennbar sind. Nachfolgend werden wir in Kapitel 5 numerische Rechnungen, die mit den vorgestellten Methoden durchgeführt wurden, vergleichen.

Alle im Rahmen dieser Diplomarbeit aufgeführten Berechnungen wurden durchgeführt mit der Finite-Elemente-Software deal.II (Bangerth u. a. 2006). Die berechneten Lösungen können mit Hilfe der Software VisuSimple (Dunne und Becker 2006; Becker u. a.) visualisiert werden.

Abschließend werden wir in Kapitel 6 die Ergebnisse zusammenfassen und Schlussfolgerungen daraus ziehen. Wir ermitteln, welches der angesprochenen Verfahren den Anforderungen am besten gerecht wird. Außerdem geben wir noch einen Ausblick, was weiterhin Gegenstand von Forschungen sein könnte.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Dr. Rannacher für die gute Betreuung während der Anfertigung dieser Arbeit danken. Auch gilt mein Dank Herrn Professor Dr. Guido Kanschat für die Betreuung, sowohl bei theoretischen wie auch praktischen Fragen. Weiterhin bedanke ich mich bei der Arbeitsgruppe Numerik an der Universität Heidelberg für viele hilfreiche Diskussionen. Vielen Dank möchte ich Herrn Professor Dr. Wolfgang Bangerth sagen, der mir oft bei Fragen zur Software mit Rat und Tat zur Seite stand.

2 Notation

In diesem Kapitel werden wir die verwendete Notation bereitstellen und die Funktionenräume einführen, die wir verwenden werden.

Wir betrachten Polygonebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Rand $\partial\Omega$. Mit n werden wir den äußeren Normaleneinheitsvektor von $\partial\Omega$, mit t einen Tangentialvektor an $\partial\Omega$ bezeichnen. Punkte im \mathbb{R}^2 werden mit $x = (x_1, x_2)$ bezeichnet. Wir betrachten Funktionen

$$\begin{aligned} u : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x = (x_1, x_2) &\mapsto u = u(x) = u(x_1, x_2). \end{aligned}$$

2.1 Ableitungen

Wir schreiben für Funktionen $u(x)$ bzw. $u(x_1, x_2)$ partielle Ableitungen verkürzt als

$$\partial_i u := \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Analog schreiben wir für höhere Ableitungen $\partial_i^p u$, bzw. $\partial_i^p \partial_j^q u$.

2.1.1 Gradient und Divergenz einer Funktion

Mit Hilfe des Nabla-Operators können wir den Gradienten einer skalaren Funktion und die Divergenz von vektorwertigen Funktionen definieren:

$$\begin{aligned} \text{grad } u &= \nabla u := (\partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_d u)^T, \\ \text{div } u &= \nabla \cdot u := \sum_{i=1}^d \partial_i u_i. \end{aligned}$$

Dabei wird für einen Vektor $\beta \in \mathbb{R}^d$ die Ableitung in Richtung β bezeichnet mit $\partial_\beta u := \beta \cdot \nabla u$, analog die Ableitungen $\partial_n u = n \cdot \nabla u$ bzw. $\partial_t u = t \cdot \nabla u$ in Richtung der äußeren Normalen bzw. einer Tangente entlang des Gebietsrandes $\partial\Omega$. Mit $\nabla^m u$ bezeichnen wir den Tensor aller partiellen Ableitungen der Ordnung m von u , z. B. in zwei Dimensionen

$$\nabla^2 u = (\partial_1^i \partial_2^j u)_{i+j=2}.$$

2.1.2 Laplace-Operator und biharmonischer Operator

Mit den vorherigen Definitionen können wir den Laplace-Operator und den biharmonischen Operator definieren:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla u) &= \Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u, \\ \Delta(\Delta u) &= \Delta^2 u = \partial_1^4 u + 2\partial_1^2 \partial_2^2 u + \partial_2^4 u. \end{aligned}$$

2.2 Funktionenräume

Im Folgenden führen wir die Funktionenräume, die wir später verwenden werden, ein.

2.2.1 Die Räume $C(\overline{\Omega})$, $C^m(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$

$C(\overline{\Omega})$ bezeichnet den Raum der stetigen Funktionen auf $\overline{\Omega}$. Dieser ist versehen mit der Maximumnorm

$$\|u\|_{\infty, \overline{\Omega}} := \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$$

vollständig und somit ein Banach-Raum. Für $m \in \mathbb{N}$ ist $C^m(\Omega)$ der Raum der in Ω m -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen. Damit gilt für den Raum $C^\infty(\Omega)$

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega).$$

In $C_0^\infty(\Omega)$ sind alle Funktionen in $C^\infty(\Omega)$, die einen kompakten Träger in Ω haben.

2.2.2 Der Lebesgue-Raum $L^2(\Omega)$

Wir bezeichnen mit $L^2(\Omega)$ den Raum der im Lebesgueschen Sinne über Ω quadratintegrablen Funktionen. Diesen versehen wir mit dem Skalarprodukt und der zugehörigen Norm:

$$(u, v)_\Omega = \int_{\Omega} uv \, dx, \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = (u, u)_\Omega^{\frac{1}{2}}.$$

Der Raum $L^2(\Omega)$ ist mit der obigen Norm vollständig, und somit ein Hilbert-Raum. Besteht keine Gefahr für Verwechslung, so schreiben wir (u, v) anstatt $(u, v)_\Omega$.

2.2.3 Die Sobolev-Räume $H^m(\Omega)$

Mit $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, bezeichnen wir den Sobolev-Raum mit verallgemeinerten Ableitungen bis zur Ordnung m in $L^2(\Omega)$. Diese Räume sind versehen mit den Skalarprodukten und den zugehörigen Normen

$$(\nabla^k u, \nabla^k v)_\Omega = \int_{\Omega} \nabla^k u \nabla^k v \, dx, \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{k=0}^m \|\nabla^k u\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

vollständig, also Hilbert-Räume. Wenn keine Gefahr für Verwechslungen besteht, schreiben wir $\|u\|_{H^m}$ oder $\|u\|_m$ anstatt $\|u\|_{H^m(\Omega)}$ und H^m statt $H^m(\Omega)$.

Die Sobolev-Räume $H_0^m(\Omega)$

Wir definieren die Sobolev-Räume $H_0^m(\Omega)$ wie folgt:

$$H_0^m(\Omega) := \{u \in H^m(\Omega) \mid \exists u_k \in C_0^\infty(\Omega) : \|u - u_k\|_{H^m} \rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty)\}.$$

Speziell werden wir die Räume $H_0^1(\Omega)$ und $H_0^2(\Omega)$ benötigen. Deshalb geben wir noch eine äquivalente Charakterisierung:

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}, \\ H_0^2(\Omega) &= \{u \in H^2(\Omega) \mid u = \partial_n u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

In (Adams und Fournier 2005) unter 5.37 wird die Äquivalenz für Gebiete Ω mit Lipschitz-Rand gezeigt.

2.2.4 Polynomräume

Für eine Diskretisierung unseres Problems verwenden wir Polynomräume. Deshalb geben wir folgende Definitionen für Polynome in \mathbb{R}^2 :

$$P_k := \left\{ p(x) = \sum_{0 \leq i+j \leq k} \alpha_{ij} x_1^i x_2^j \right\}, \quad Q_k := \left\{ q(x) = \sum_{0 \leq i, j \leq k} \alpha_{ij} x_1^i x_2^j \right\}.$$

3 Problemstellung

Dieses Kapitel gibt einen Einblick in die physikalische Theorie der Plattengleichung. Wir werden aus den physikalischen Gesetzen die Differentialgleichung und die zugehörigen Randbedingungen herleiten. Außerdem werden wir Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zeigen und Resultate zur Regularität von Lösungen angeben.

3.1 Theorie der Biegung dünner Platten

Unter einer dünnen Platte wollen wir einen elastischen Körper verstehen, dessen Mittelfläche ein Gebiet Ω in der (x_1, x_2) -Ebene einnimmt und dessen x_3 -Dicke d konstant und klein ist $d \ll 1$. Die betrachtete Platte ist isotrop und homogen.

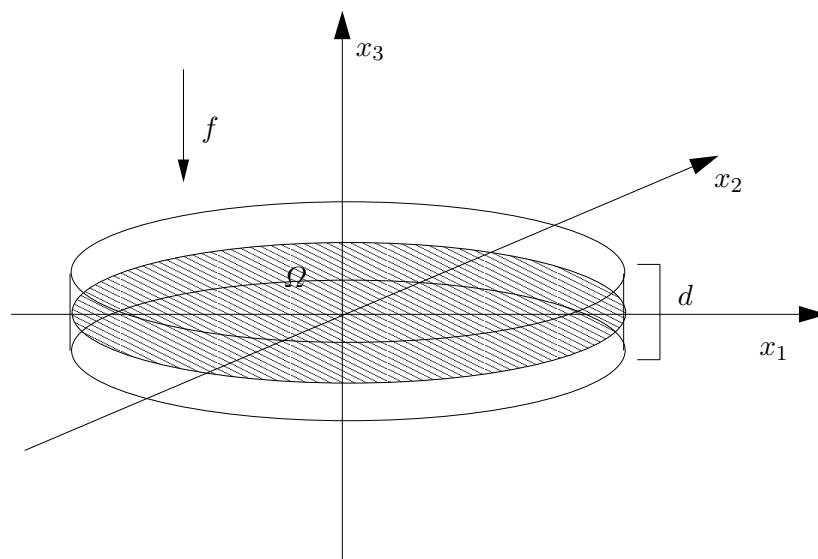


Abbildung 3.1: Dreidimensionales Bild einer vertikal belasteten Platte

Das ursprünglich dreidimensionale Problem lässt sich somit auf ein zweidimensionales reduzieren. Die Auslenkung der Platte durch die Kraft f geschieht nur noch in x_3 -Richtung,

vergleiche Abbildung 3.1. Wir bezeichnen die Auslenkung mit $u(x) = u(x_1, x_2)$. Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit der auf Kirchhoff zurückgehenden linearen Theorie, die nur kleine Auslenkungen $|u| \ll d$ betrachtet.

3.1.1 Potentialtheoretische Methode

Die folgende Herleitung der Plattengleichung und der zugehörigen Randbedingungen ist entnommen aus (Rannacher 1976/77). Die elastische Energie der Platte ist gegeben durch

$$J_E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ |\Delta u|^2 - 2(1 - \sigma)(\partial_1^2 u \partial_2^2 u - (\partial_1 \partial_2 u)^2) \} dx,$$

wobei $\sigma \in [0, 1)$ die Querkontraktionszahl ist. Für die äußere Kraft gilt entsprechend

$$J_F = - \int_{\Omega} f u \, dx.$$

Damit ergibt sich für die gesamte potentielle Energie der Platte folgende Gleichung:

$$J = J_E + J_F = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ |\Delta u|^2 - 2(1 - \sigma)(\partial_1^2 u \partial_2^2 u - (\partial_1 \partial_2 u)^2) - 2f u \} dx.$$

Die tatsächliche Auslenkung u minimiert das oben angegebene Funktional unter allen „zulässigen“ Funktionen aus $H^2(\Omega)$. Mit

$$\frac{d}{dt} J(u + t\varphi)|_{t=0} = 0$$

erhalten wir die schwache Formulierung der Plattengleichung

$$(\Delta u, \Delta \varphi) - (1 - \sigma) \{ (\partial_1^2 u, \partial_2^2 \varphi) + (\partial_2^2 u, \partial_1^2 \varphi) - 2(\partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_2 \varphi) \} = (f, \varphi). \quad (3.1)$$

Für reguläre Funktionen $u \in C^4(\Omega)$ gilt nach zweimaliger Anwendung des Integralsatzes von Gauß

$$\begin{aligned} (\Delta u, \Delta \varphi) &= (\Delta u, \partial_n \varphi)_{\partial \Omega} - (\nabla \Delta u, \nabla \varphi) \\ &= (\Delta u, \partial_n \varphi)_{\partial \Omega} - (\partial_n \Delta u, \varphi)_{\partial \Omega} + (\Delta^2 u, \varphi). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Bemerkung 3.1. Der Integralsatz von Gauß gilt auf Polygonegebieten, d. h. auf Gebieten mit Schlitzen oder einspringenden Ecken. Damit können wir den Satz von Gauß auf alle in dieser Arbeit auftretenden Gebiete anwenden.

Mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor $n = (n_1, n_2)$ und zugehörigem Tangenteneinheitsvektor $t = (n_2, -n_1)$ gilt

$$\partial_n \varphi = n_1 \partial_1 \varphi + n_2 \partial_2 \varphi, \quad \partial_t \varphi = n_2 \partial_1 \varphi - n_1 \partial_2 \varphi. \quad (3.3)$$

Bei Beachtung von $\|n\| = 1$ ist

$$\partial_1 \varphi = n_1 \partial_n \varphi + n_2 \partial_t \varphi, \quad \partial_2 \varphi = n_2 \partial_n \varphi - n_1 \partial_t \varphi. \quad (3.4)$$

Unter Verwendung des Vektorfeldes

$$w = \begin{pmatrix} -\partial_2 \varphi \partial_1 \partial_2 u + \partial_1 \varphi \partial_2^2 u \\ -\partial_1 \varphi \partial_1 \partial_2 u + \partial_2 \varphi \partial_1^2 u \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

und den Gleichungen (3.3) und (3.4) ergibt sich mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß

$$\begin{aligned} (\partial_1^2 u, \partial_2^2 \varphi) + (\partial_2^2 u, \partial_1^2 \varphi) - 2(\partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_2 \varphi) &= \int_{\Omega} \operatorname{div} w \, dx = \int_{\partial \Omega} w \cdot n \, do \\ &= -n_1 (\partial_2 \varphi, \partial_1 \partial_2 u)_{\partial \Omega} + n_1 (\partial_1 \varphi, \partial_2^2 u)_{\partial \Omega} - n_2 (\partial_1 \varphi, \partial_1 \partial_2 u)_{\partial \Omega} + n_2 (\partial_2 \varphi, \partial_1^2 u)_{\partial \Omega} \\ &= (\partial_2 \varphi, \partial_t \partial_1 u)_{\partial \Omega} - (\partial_1 \varphi, \partial_t \partial_2 u)_{\partial \Omega} \\ &= (\partial_n \varphi, \partial_t^2 u)_{\partial \Omega} - (\partial_t \varphi, \partial_t \partial_n u)_{\partial \Omega}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Bei partieller Integration des zweiten Terms erhalten wir dann

$$(\partial_1^2 u, \partial_2^2 \varphi) + (\partial_2^2 u, \partial_1^2 \varphi) - 2(\partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_2 \varphi) = (\partial_t^2 u, \partial_n \varphi)_{\partial \Omega} + (\partial_t^2 \partial_n u, \varphi)_{\partial \Omega}. \quad (3.7)$$

Fassen wir alle bisher gefundenen Ergebnisse (3.1) - (3.7) zusammen, ergibt sich

$$\begin{aligned} &(\Delta^2 u, \varphi) - (f, \varphi) \\ &+ (\Delta u, \partial_n \varphi)_{\partial \Omega} - (1 - \sigma)(\partial_t^2 u, \partial_n \varphi)_{\partial \Omega} \\ &- (\partial_n \Delta u, \varphi)_{\partial \Omega} - (1 - \sigma)(\partial_t^2 \partial_n u, \varphi)_{\partial \Omega} = 0. \end{aligned}$$

Da φ beliebig gewählt war, können wir φ so variieren, dass die Randterme verschwinden. Es ergibt sich notwendig im Innern des Gebietes die Plattengleichung (3.8). Der Rand $\partial \Omega$ von Ω sei in drei disjunkte Teile

$$\partial \Omega = \partial \Omega_E \cup \partial \Omega_G \cup \partial \Omega_F$$

zerlegt.

Zu den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_E \cup \partial\Omega_G, \\ \partial_n u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_E, \end{aligned}$$

ergeben sich notwendig die natürlichen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \Delta u - (1 - \sigma)\partial_t^2 u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_G \cup \partial\Omega_F, \\ \partial_n \Delta u - (1 - \sigma)\partial_t^2 \partial_n u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_F. \end{aligned}$$

Die Auslenkung u muss notwendig folgender Gleichung genügen

$$\Delta^2 u = f \quad \text{in } \Omega. \quad (3.8)$$

Es können somit Randbedingungen der folgenden Form auftreten:

$$\begin{aligned} u = \partial_n u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_E, \\ u = M(u) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_G, \\ M(u) = N(u) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_F, \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei für $\sigma \in [0, 1)$

$$M(u) = \Delta u - (1 - \sigma)\partial_t^2 u, \quad N(u) = \partial_n \Delta u - (1 - \sigma)\partial_t^2 \partial_n u$$

sei. Dabei beschreibt die Bedingung auf dem Rand $\partial\Omega_E$ eine eingespannte, auf dem Teil $\partial\Omega_G$ des Randes eine gelenkig gelagerte und die Bedingung auf $\partial\Omega_F$ eine freie Platte.

3.1.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Wir definieren mit Hilfe der variationellen Formulierung die Bilinearform

$$a(u, \varphi) := (\Delta u, \Delta \varphi) - (1 - \sigma) \left\{ (\partial_1^2 u, \partial_2^2 \varphi) + (\partial_2^2 u, \partial_1^2 \varphi) - 2(\partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_2 \varphi) \right\}. \quad (3.10)$$

Damit lässt sich das Problem (3.8) auch schwach mit Hilfe der Bilinearform formulieren. Gesucht ist $u \in V$, so dass gilt

$$a(u, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in V. \quad (3.11)$$

Der Raum der zulässigen Funktionen V ist definiert als

$$V := \{\varphi \in H^2(\Omega) \mid \varphi = \partial_n \varphi = 0 \text{ auf } \partial\Omega_E \text{ und } \varphi = 0 \text{ auf } \partial\Omega_G\}. \quad (3.12)$$

Satz 3.1. Falls gilt $|\partial\Omega_E| > 0$, ist die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ beschränkt und koerziv auf V , d. h. es gilt

$$\begin{aligned} |a(u, \varphi)| &\leq c \|u\|_2 \|\varphi\|_2, \\ a(u, u) &\geq \gamma \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass die Bilinearform beschränkt ist. Mit der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} |a(u, \varphi)| &\leq |(\Delta u, \Delta \varphi)| + (1 - \sigma) |(\partial_1^2 u, \partial_2^2 \varphi) + (\partial_2^2 u, \partial_1^2 \varphi) + 2(\partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_2 \varphi)| \\ &\leq c \|u\|_2 \|\varphi\|_2. \end{aligned}$$

Es bleibt also noch die Koerzivität zu zeigen. Dies sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= (\Delta u, \Delta u) - 2(1 - \sigma) \{(\partial_1^2 u, \partial_2^2 u) - (\partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_2 u)\} \\ &= \|\partial_1^2 u\|^2 + \|\partial_2^2 u\|^2 + 2(1 - \sigma) \|\partial_1 \partial_2 u\|^2 + 2\sigma (\partial_1^2 u, \partial_2^2 u). \end{aligned}$$

Unter der Verwendung der Youngschen Ungleichung $2ab \geq -(a^2 + b^2)$ gilt

$$2\sigma (\partial_1^2 u, \partial_2^2 u) \geq -\sigma (\|\partial_1^2 u\|^2 + \|\partial_2^2 u\|^2).$$

Damit können wir die Koerzivität der Bilinearform zeigen:

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq (1 - \sigma) \|\partial_1^2 u\|^2 + (1 - \sigma) \|\partial_2^2 u\|^2 + 2(1 - \sigma) \|\partial_1 \partial_2 u\|^2 \\ &= (1 - \sigma) \|\nabla^2 u\|^2. \end{aligned}$$

Wir können die verallgemeinerte Poincarésche Ungleichung wegen $|\partial\Omega_E| > 0$ auf u und ∇u anwenden. Damit gilt wegen $\sigma < 1$ für ein $\varrho > 0$

$$\|u\|_2^2 \leq c \|\nabla^2 u\|^2 \leq \varrho a(u, u).$$

Die Querkontraktionszahl σ geht als Faktor in die Konstante $\gamma = \frac{1}{\varrho}$ ein. \square

Für den Beweis der Existenz einer eindeutigen Lösung verwenden wir den Darstellungssatz von Riesz. Um diesen anwenden zu können, müssen wir noch zeigen, dass (f, \cdot) stetig bezüglich

der Norm $\|\cdot\|_2$ ist. Es gilt

$$|(f, \varphi)| \leq \|f\| \|\varphi\| \leq c \|\varphi\| \leq c \|\varphi\|_2 \quad \forall \varphi \in V.$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich, da nur positive Terme addiert werden. Somit ist die Stetigkeit $|(f, \varphi)| \leq c \|\varphi\|_2$ gezeigt.

Satz 3.2. Für jedes $f \in L^2(\Omega)$ hat (3.11) eine eindeutige Lösung $u \in V$, wenn gilt $|\partial\Omega_E| > 0$.

Beweis. Wir haben bereits in Satz 3.1 gesehen, dass die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ bezüglich $\|\cdot\|_2$ beschränkt und koerziv ist. Damit folgt nach dem Darstellungssatz von Riesz, dass (3.11) eine eindeutige Lösung $u \in V$ hat. \square

Für die Fehlerabschätzungen werden wir ein Hilfsproblem einführen. Der Einfachheit halber werden wir nur den Fall der rundherum eingespannten Platte, d. h. $\partial\Omega = \partial\Omega_E$, betrachten.

Definition 3.1 (Duales Problem). Gesucht ist eine duale Lösung $z \in V$, so dass für $g \in H^{-k}(\Omega)$, $k = 0$ oder 1 , gilt

$$\begin{aligned} a(\varphi, z) &= (g, \varphi) && \text{in } \Omega, \\ z = \partial_n z &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.13}$$

für alle $\varphi \in V$.

Aussagen über das primale Problem übertragen sich entsprechend auf das duale Problem.

3.1.3 Regularität von Lösungen

Beim Wechsel der Belegung der Randbedingungen und in den Eckpunkten können Singularitäten in der Lösung u des Problems (3.8), (3.9) auftreten. Das Verhalten der Auslenkung in diesen Situationen wurde in (Melzer und Rannacher 1979) und in (Blum und Rannacher 1980) untersucht. In diesem Kapitel geben wir daraus Resultate über die Regularität der Lösung an.

Zur Untersuchung der Regularität von Lösungen betrachten wir ein Gebiet Ω_0 , das in der Umgebung eines kritischen Punktes liegt. Dies sind zum einen Punkte mit innerem Winkel $\omega \neq 180^\circ$, zum anderen Punkte, in denen die Randbedingung wechselt. Wir nehmen an, dass jeder Randteil ein Stück gerade verläuft und nur zu einer der Mengen $\partial\Omega_E$, $\partial\Omega_G$ oder $\partial\Omega_F$ gehört. Es sind Winkel ω zwischen den Schenkeln Γ_1 und Γ_2 erlaubt, für die gilt $0 < \omega \leq 2\pi$. Wir verwenden die Polarkoordinatendarstellung (r, θ) in Abbildung 3.2. Untersucht wird das

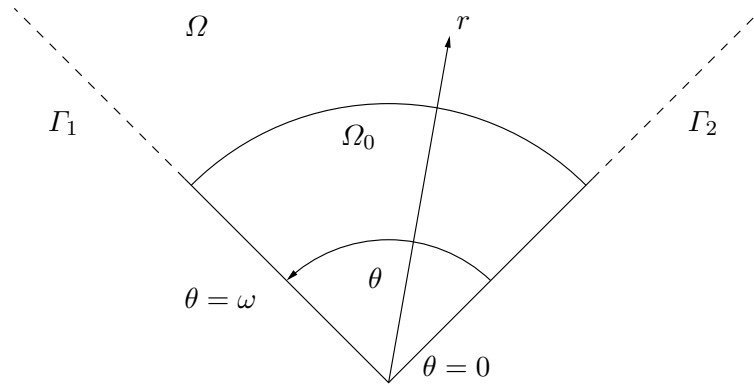


Abbildung 3.2: Kritischer Randpunkt

Verhalten für $r \rightarrow 0$. Dabei können sechs mögliche Randbedingungskombinationen auftreten:

E/E eingespannt/eingespannt,

E/G eingespannt/gelenkig gelagert,

E/F eingespannt/frei,

G/G gelenkig gelagert/gelenkig gelagert,

G/F gelenkig gelagert/frei,

F/F frei/frei.

Wir untersuchen im Folgenden die möglichen singulären Bestandteile u_S von u :

$$u_S(r, \theta) = r^z \Psi(\theta), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dabei genügt u_S der Differentialgleichung $\Delta^2 u_S = 0$ in Ω_0 und entlang des Randes Γ_1 und Γ_2 den gegebenen Randbedingungen. Bei Transformation auf Polarkoordinaten gelangt man zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung für $\Psi(\theta)$, die vom komplexen Parameter z abhängt:

$$\partial_\theta^4 \Psi + (2z^2 - 4z + 4) \partial_\theta^2 \Psi + (z^4 - 4z^3 + 4z^2) \Psi = 0, \quad \theta \in (0, \omega).$$

Die Randbedingungen für $\theta \in \{0, \omega\}$ transformieren sich zu

$$\Psi = 0, \quad \partial_\theta^2 \Psi + \{\sigma z^2 + (1 - \sigma)z\} \Psi = 0, \quad (3.14)$$

$$\partial_\theta \Psi = 0, \quad \partial_\theta^3 \Psi + \{(2 - \sigma)z^2 - 3(1 - \sigma)z + 2(1 - \sigma)\} \partial_\theta \Psi = 0. \quad (3.15)$$

Allgemeine Lösungen sind im Fall $z \notin \{0, 1, 2\}$

$$\Psi(\theta) = c_1 \sin z\theta + c_2 \cos z\theta + c_3 \sin(z-2)\theta + c_4 \cos(z-2)\theta,$$

im Fall $z \in \{0, 2\}$

$$\Psi(\theta) = c_1 + c_2\theta + c_3 \sin 2\theta + c_4 \cos 2\theta,$$

und im Fall $z = 1$

$$\Psi(\theta) = c_1 \sin \theta + c_2\theta \sin \theta + c_3 \cos \theta + c_4\theta \cos \theta.$$

Setzt man die Randwerte für θ ein, erhält man ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten c_1, \dots, c_4 . Dies hat genau dann eine nicht triviale Lösung, wenn die zugehörige Determinante $D(z)$ der Koeffizientenmatrix $K(z)$ in Abhängigkeit des Parameters z verschwindet. Die schwache Lösung u der Plattengleichung lässt sich in der Form

$$u(r, \theta) = \sum_{\substack{1 < \operatorname{Re} z_k < 3 \\ q=0, \dots, m_k-1}} a_k r^{z_k} \ln(r)^q \Psi_k(\theta) + u_R(r, \theta)$$

darstellen, vergleiche hierzu (Kondrat'ev 1967). Dabei sind z_k gerade die komplexen Nullstellen der Determinanten $D(z)$ mit Vielfachheiten m_k aus dem Intervall $1 < \operatorname{Re} z < 3$ und a_k komplexe Konstanten. Aus der Darstellung

$$r^{z_k} = r^{\alpha_k} \{ \cos(\beta_k \ln r) + i \sin(\beta_k \ln r) \}, \quad z_k = \alpha_k + i\beta_k,$$

kann man entnehmen, dass im Wesentlichen der Realteil von z_k die Regularität von

$$a_k r^{z_k} \ln(r)^q \Psi_k(\theta)$$

bestimmt. Da die schwache Lösung beschränkte Energie hat, werden nur Singuläranteile mit $\operatorname{Re} z_k > 1$ berücksichtigt. Terme mit $\operatorname{Re} z_k \geq 3$ sind in dem regulären Teil u_R enthalten. Explizit sind Werte für die Nullstellen z_k in (Melzer und Rannacher 1979) angegeben. Wir erwähnen nur Werte für Gebiete und Randbedingungen, die wir später verwenden in Tabelle 3.1. Die angegebenen Regularitäten sind minimale Regularitäten. Es ist möglich, dass die Lösung regulärer ist.

Satz 3.3. *Sei Ω ein beschränktes Polygongebiet und sei der Winkel ω in kritischen Punkten kleiner als die folgenden Werte in Tabelle 3.2. In den Fällen E/F , G/F und F/F ist $\sigma = 0,3$ gewählt worden. Für gegebenes $f \in H^{-l}(\Omega)$ besitzt die schwache Lösung von Problem (3.8),*

(3.9) die Regularität $u \in V \cap H^{4-l}$ und genügt der a priori Abschätzung

$$\|u\|_{H^{4-l}(\Omega)} \leq c \|f\|_{H^{-l}(\Omega)}. \quad (3.16)$$

Beweis. Für den Beweis siehe (Blum und Rannacher 1980). □

Definition 3.2. Wir nennen ein Gebiet Ω H^k -regulär, falls die Lösung der Plattengleichung für $f \in H^{-l}(\Omega)$, $l = 0$ oder 1 , in $H^{k-l}(\Omega)$ liegt und der a priori Abschätzung (3.16) genügt.

Tabelle 3.1: Regularität der Lösung für $f \in L^2(\Omega)$ in Abhängigkeit vom inneren Winkel und von der Randbelegung

	90°	270°	360°
E/E	$u \in H^{\frac{9}{2}}$	$u \in H^3$	$u \in H^{\frac{5}{2}}$
E/G	$u \in H^4$	$u \in H^{\frac{7}{3}}$	$u \in H^{\frac{9}{4}}$
E/F	$u \in H^3$	$u \in H^{\frac{7}{3}}$	$u \in H^{\frac{9}{4}}$
G/G	$u \in H^3$	$u \in H^{\frac{7}{3}}$	$u \in H^{\frac{5}{2}}$
G/F	$u \in H^3$	$u \in H^{\frac{7}{3}}$	$u \in H^{\frac{9}{4}}$
F/F	$u \in H^4$	$u \in H^{\frac{8}{3}}$	$u \in H^{\frac{5}{2}}$

Tabelle 3.2: Größen innerer Winkel in kritischen Randpunkten

	$l = 0$	$l = 1$
E/E	126,283696...°	180°
E/G	90°	126,726699...°
E/F	52,054347...°	95,349059...°
G/G	60°	90°
G/F	51,123345...°	90°
F/F	77,753311...°	180°

4 Diskretisierung

Für die numerische Approximation der Plattengleichung benötigen wir eine Zerlegung des Gebietes Ω in Zellen. Wir betrachten im Folgenden nur Zellen, die Vierecke sind. Eine vollständige Zerlegung unseres Gebietes Ω bezeichnen wir mit \mathcal{T}_h , wobei h der maximale Durchmesser einer Zelle T ist. Damit gilt

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T.$$

Mit \mathcal{T}_h sei eine Zerlegung in abgeschlossene Zellen gegeben. Eine solche Zerlegung habe die folgenden Eigenschaften, vergleiche (Rannacher 2001):

1. (Strukturregularität) Je zwei Vierecke $T \in \mathcal{T}_h$ haben höchstens eine Kante oder einen Eckpunkt gemeinsam.
2. (Formregularität) Sei h_T der Durchmesser und ϱ_T der Inkreisradius der Zelle T . Dann gelte

$$\sup_{h>0} \max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T}{\varrho_T} \leq c$$

für ein $c > 0$.

3. (Größenregularität) Es gibt ein $c > 0$, so dass

$$\max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \leq c \min_{T \in \mathcal{T}_h} h_T.$$

Mit \mathcal{E}_h bezeichnen wir die Menge der Kanten in \mathcal{T}_h . Ziel ist es, geeignete Ansatzräume zur numerischen Approximation der Plattengleichung zu finden, d. h. wir suchen einen endlichdimensionalen Raum V_h . Dies ist bei den konformen Methoden ein Teilraum von V , wobei V ein unendlichdimensionaler Raum von zulässigen Funktionen zur Lösung der Plattengleichung ist. Für alle Berechnungen werden wir Finite-Elemente-Ansatzräume verwenden, die auf Polynomräumen $P(T)$ auf den Zellen basieren:

$$V_h := \left\{ \varphi_h \in L^2(\Omega) \mid \varphi_h|_T \in P(T), T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Dabei treten volle Polynomräume oder Polynomräume, die als lineare Hülle spezieller Monome definiert sind, auf. Die Schwierigkeit liegt nun darin, globale Eigenschaften zu realisieren. Dazu geben wir folgende Definition:

Definition 4.1. Ein endlichdimensionaler Ansatzraum V_h eines Raumes V heißt V -konform, falls die Inklusion

$$V_h \subset V$$

gilt, andernfalls nichtkonform.

Um einen konformen Ansatzraum für die Approximation von Funktionen in V

$$V := \{\varphi \in H^2(\Omega) \mid \varphi = \partial_n \varphi = 0 \text{ auf } \partial\Omega_E \text{ und } \varphi = 0 \text{ auf } \partial\Omega_G\}.$$

zu konstruieren, ist es notwendig, dass stückweise definierte Funktionen über Zellgrenzen hinweg stetig sind und erste Ableitungen an den Zellgrenzen stetige Übergänge besitzen. Hinzu kommt für Funktionen in V , dass sowohl die Funktion auf $\partial\Omega_E \cup \partial\Omega_G$, als auch deren Normalableitung auf $\partial\Omega_E$ verschwindet. Das bedeutet, dass die gesuchten Polynomräume Polynome enthalten müssen, die einen relativ hohen Grad haben. Stückweise konstante, lineare oder quadratische Polynome reichen dafür nicht aus. Die verwendeten Polynome müssen einen Grad ≥ 3 haben. Im folgenden Abschnitt werden wir ein Element vorstellen, das mit Polynomen in Q_3 auskommt und einen konformen Polynomraum erzeugt.

Eine Alternative dazu ist ein nichtkonformer Ansatz. Wir werden in Abschnitt 4.3 sehen, dass auch solch ein Ansatz vernünftige Approximationen liefert. Jedoch werden die Konvergenzordnungen nicht so gut sein wie im konformen Fall.

Ein Finite-Elemente-Ansatz wird nicht nur durch die Vorgabe von Polynomräumen auf den Zellen der Zerlegung bestimmt. Es ist außerdem notwendig einen Satz von sogenannten Knotenfunktionalen vorzugeben. Wir werden in dieser Arbeit nur Punktauswertungen der Funktion oder der Ableitungen der Funktion als Knotenfunktionale verwenden. Diese Angaben werden so gewählt, dass Polynome dadurch eindeutig bestimmt sind. Dazu treffen wir folgende Definition.

Definition 4.2. Ein Polynomraum $P(T)$ und ein zugehöriger Satz $K(T)$ von Knotenfunktionalen heißen unisolvent, wenn durch die Vorgabe der Knotenwerte jedes Polynom aus $P(T)$ eindeutig bestimmt ist.

Notwendig für Unisolvenz ist die Bedingung $\dim P(T) = |K(T)|$ und hinreichend, dass für ein $p \in P(T)$ aus $\chi(p) = 0$ für alle $\chi \in K(T)$ auch $p \equiv 0$ folgt. Wir werden dies zum Nachweis der Unisolvenz verwenden.

4.1 Grundlagen

In diesem Kapitel werden wir einige Resultate bereitstellen, die wir für die Fehleranalyse der beschriebenen Verfahren verwenden. Sei mit $I_T u \in V_h$ die Lagrange-/ Hermite-Interpolierende einer stetig differenzierbaren Funktion u bezeichnet. Dann gilt für den Interpolationsfehler folgender Satz:

Satz 4.1. *Für jedes $v \in H^m(T)$ und die zugehörige Lagrange-/ Hermite-Interpolierende $I_T v \in P_l(T)$ auf jeder Zelle $T \in \mathcal{T}_h$ gilt für $2 \leq m \leq l+1$*

$$|v - I_T v|_{k,T} \leq ch_T^{m-k} |v|_{m,T}, \quad 0 \leq k \leq m, \quad (4.1)$$

mit einer Konstanten $c = c(d, m, \hat{T})$.

Beweis. Der Beweis kann nachgelesen werden in (Rannacher 2000/01). □

Weiter benötigen wir noch folgende inverse Abschätzung:

Satz 4.2. *Auf jeder Zelle $T \in \mathcal{T}_h$ gilt für Finite-Elemente-Funktionen $v \in P(T)$*

$$|v|_{k,T} \leq ch_T^{s-k} |v|_{s,T}, \quad 0 \leq s \leq k. \quad (4.2)$$

Beweis. Der Beweis kann nachgelesen werden in (Rannacher 2000/01). □

Der folgende Satz ist eine Erweiterung des Bramble-Hilbert-Lemmas.

Satz 4.3. *Sei Ω eine offene beschränkte Menge im \mathbb{R}^2 mit hinreichend glattem Rand, seien weiter $k, l \in \mathbb{N}$ und sei W ein Raum, so dass folgende Inklusionen gelten:*

$$P_l(\Omega) \subset W \subset H^{l+1}.$$

Der Raum W sei mit der Norm $\|\cdot\|_{l+1,\Omega}$ versehen. Schließlich sei A eine stetige Bilinearform auf dem Raum $H^{k+1}(\Omega) \times W$, für die gilt

$$A(u, v) = 0 \quad \forall u \in P_k, v \in W \quad (4.3)$$

$$A(u, v) = 0 \quad \forall u \in H^{k+1}(\Omega), v \in P_l. \quad (4.4)$$

Dann gibt es eine Konstante $c = c(\Omega)$, so dass folgende Abschätzung gilt:

$$|A(u, v)| \leq c \|A\| |u|_{k+1} |v|_{l+1} \quad \forall u \in H^{k+1}(\Omega), v \in W.$$

Beweisidee. Wir geben eine Beweisskizze, dem Beweis in (Ciarlet und Lions 1991) folgend. Für jede Funktion $v \in W$ ist die Linearform $A(\cdot, v) : u \in H^{k+1}(\Omega) \mapsto A(u, v)$ stetig und verschwindet wegen (4.3) auf dem Raum P_k . Mit dem Bramble-Hilbert-Lemma folgt, dass es eine Konstante $c(\Omega)$ gibt, so dass gilt ($\|\cdot\|'$ bezeichnet die Norm auf dem Dualraum)

$$|A(u, v)| \leq c(\Omega) \|A(\cdot, v)\|'_{k+1} |u|_{k+1} \quad \forall u \in H^{k+1}(\Omega). \quad (4.5)$$

Mit (4.4) gilt $A(u, v) = A(u, v + q)$ für alle $q \in P_l(\Omega)$ und damit

$$|A(u, v)| = |A(u, v + q)| \leq \|A\| \|u\|_{k+1} \|v + q\|_{l+1}.$$

Man kann zeigen, dass gilt

$$\begin{aligned} |A(u, v)| &\leq \|A\| \|u\|_{k+1} \inf_{q \in P_l(\Omega)} \|v + q\|_{l+1} \\ &\leq \|A\| \|u\|_{k+1} |v|_{l+1} \quad \forall u \in H^{k+1}(\Omega), v \in W. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\|A(\cdot, v)\|'_{k+1} = \sup_{u \in H^{k+1}(\Omega)} \frac{|A(u, v)|}{\|u\|_{k+1}} \leq c(\Omega) \|A\| |v|_{l+1}. \quad (4.6)$$

Die behauptete Abschätzung folgt aus den Ungleichungen (4.5) und (4.6). \square

Den obigen Satz werden wir für den Fall $k = 0, l = 1$ und $\Omega = \hat{T}$ anwenden. Dabei ist \hat{T} die Referenzzelle. Außerdem werden wir Spurabschätzungen benötigen.

Satz 4.4. *Für Funktionen $v \in C^1(\bar{\Omega})$ gilt die sogenannte „Spurabschätzung“*

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad (4.7)$$

mit einer Konstante $c = c(\Omega)$, die vom Gebiet Ω abhängt.

Beweis. Der Beweis kann nachgelesen werden in (Rannacher 2000/01). \square

Für Fehlerabschätzungen werden wir das folgende Resultat benötigen.

Satz 4.5. *Für Funktionen $v \in H^1(T)$ gilt die Abschätzung*

$$\|v\|_{L^2(\partial T)} \leq ch^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(T)} + ch^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(T)}.$$

Beweis. Es gilt auf der Referenzzelle \hat{T}

$$\|v\|_{L^2(\partial\hat{T})} \leq c \|v\|_{L^2(\hat{T})}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(\hat{T})}^{\frac{1}{2}},$$

vergleiche (Brenner und Scott 2005). Wir erhalten durch Transformation und Anwendung der Youngschen Ungleichung $2ab \leq (a^2 + b^2)$

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\partial T)} &\leq c \|v\|_{L^2(T)}^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{4}} h^{\frac{1}{4}} \|\nabla v\|_{L^2(T)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq ch^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(T)} + ch^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(T)}. \end{aligned} \quad \square$$

4.2 Beispiel eines V -konformen Ansatzes

Dieses Kapitel wird sich mit einem konformen Ansatz zur Lösung des Problems (3.8) mit den Randdaten (3.9) beschäftigen. Wir stellen eine Finite Element vor, mit dem wir einen solchen Ansatz realisieren. Durch die Wahl der Knotenfunktionale stellen wir sicher, dass die Finite-Elemente-Funktionen global stetig differenzierbar sind. Dieser Ansatz von (Bogner u. a.) liefert somit einen konformen Teilraum von V .

4.2.1 Beschreibung des verwendeten C^1 -Elements, das Bogner-Fox-Schmit-Element

Wir haben schon erwähnt, dass für einen konformen Ansatz Polynome vom Grad ≥ 3 notwendig sind. Daher verwenden wir den Polynomraum $Q_3(T)$. Dazu geben wir die in Abbildung 4.1 dargestellten Knotenfunktionale vor. Dabei bezeichnet \bullet die Punktauswertung, \circ die

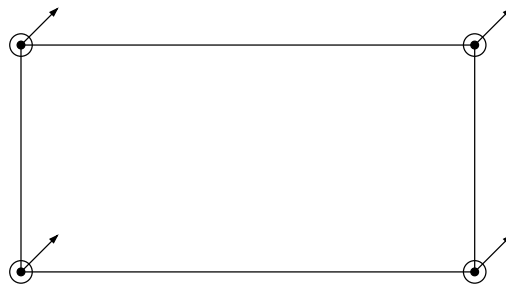


Abbildung 4.1: Bogner-Fox-Schmit-Element

Auswertung der ersten Ableitungen und \nearrow die Auswertung der gemischten zweiten Ableitungen jeweils an den vier Eckpunkten. Diese Vorgaben sind sinnvoll, wie folgender Satz zeigt.

Satz 4.6. *Die Vorgabe des Polynomraums $Q_3(T)$ und der oben beschriebenen Knotenfunktionale $K(T)$ definieren einen unisolventen Finite-Elemente-Ansatz.*

Beweis. Für den Beweis siehe (Ciarlet und Lions 1991) Theorem 9.4. □

Wir benötigen zu dem Finiten Element, den Knotenfunktionalen und dem Polynomraum noch den Raum der Finite-Elemente-Funktionen.

Satz 4.7. *Durch den Satz von Knotenfunktionalen definieren wir folgenden Finite-Elemente-Ansatzraum*

$$V_h := \{ \varphi_h \in L^2(\Omega) \mid \varphi_h|_T \in Q_3(T), \varphi_h, \nabla \varphi_h \text{ und } \partial_1 \partial_2 \varphi_h \text{ stetig in den Eckpunkten der } T \in \mathcal{T}_h, \varphi_h = \nabla \varphi_h = \partial_1 \partial_2 \varphi_h = 0 \text{ in Eckpunkten auf } \partial\Omega_E, \varphi_h = 0 \text{ in Eckpunkten auf } \partial\Omega_G \}.$$

Dieser mit dem Raum V_h definierte Ansatz ist V -konform.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass sowohl die Funktionswerte als auch die Werte der Normalableitungen stetige Übergänge entlang von Kanten haben. Um dies zu zeigen, betrachten wir den Sprung zweier Funktionen entlang einer Kante. Aufgefasst als Funktionen entlang einer Kante sind dies Polynome vom Grad ≤ 3 , die eindeutig durch die Vorgabe von den beiden Funktionswerten und den Werten für die erste Ableitung bestimmt sind, daher ist der Sprung über eine Zellkante Null. Die Normalableitung entlang einer Kante ist ein Polynom vom Grad ≤ 3 . Dies ist durch die Vorgabe der ersten und der gemischten zweiten Ableitung eindeutig bestimmt. Daher ist dieser Ansatz V -konform. □

Damit können wir $V_h \subset V$ als einen Teilraum von $H^2(\Omega)$, sogar von $C^1(\overline{\Omega})$ betrachten, denn es gilt die Inklusion $V_h \subset H^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, vergleiche (Ciarlet und Lions 1991) Theorem 9.5.

4.2.2 Beschreibung des Verfahrens

Da wir in diesem Kapitel ein V -konformes Verfahren betrachten, können wir die kontinuierliche Bilinearform (3.10) auch für das diskrete Verfahren verwenden:

$$a_h(u, \varphi) = (\Delta u, \Delta \varphi) - (1 - \sigma)[(\partial_1^2 u, \partial_2^2 \varphi) + (\partial_2^2 u, \partial_1^2 \varphi) - 2(\partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_2 \varphi)]$$

Mit Hilfe der Bilinearform lässt sich das Verfahren nun wie folgt formulieren:

Gesucht ist $u_h \in V_h$, so dass gilt

$$a_h(u_h, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in V_h. \quad (4.8)$$

Satz 4.8. *Das Problem (4.8) hat eine eindeutige Lösung $u_h \in V_h$, falls gilt $|\partial\Omega_E| > 0$.*

Beweis. In Kapitel 3 haben wir bereits die Koerzivität und Beschränktheit von $a(\cdot, \cdot)$ auf V gezeigt. Damit ist auch $a_h(\cdot, \cdot)$ auf V_h beschränkt und koerziv, da $V_h \subset V$ ist und sich die Beziehungen auf $a_h(\cdot, \cdot)$ übertragen. Auch die Stetigkeit von (f, \cdot) bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ überträgt sich. Damit impliziert Satz 3.2 die eindeutige Lösbarkeit von (4.8). \square

Bemerkung 4.1. Für die diskrete Bilinearform gilt $a_h(u_h, \varphi) = (f, \varphi)$ für alle $\varphi \in V_h$. Ebenso gilt für die kontinuierliche Lösung u von (3.11) $a_h(u, \varphi) = (f, \varphi)$ für alle $\varphi \in V$, also auch für alle $\varphi \in V_h$, denn $V_h \subset V$ ist ein Teilraum. Damit gilt die Galerkin-Orthogonalität

$$a_h(u - u_h, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in V_h. \quad (4.9)$$

4.2.3 Fehlerabschätzungen

In folgendem Abschnitt geben wir eine vollständige Fehleranalyse für das Bogner-Fox-Schmit-Element. Der Einfachheit halber werden wir nur den Fall der eingespannten Platte betrachten, d. h. $\partial\Omega = \partial\Omega_E$.

Satz 4.9. *Sei das Gebiet Ω H^k -regulär, $k = 3$ oder 4 . Dann gilt für die Lösung u von (3.11) und die Lösung $u_h \in V_h$ von (4.8) die Abschätzung*

$$\|u - u_h\|_2 \leq ch^{k-2}|u|_k.$$

Beweis. Mit dem Lemma von Céa gilt die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_2 \leq c \inf_{\varphi_h \in V_h} \|u - \varphi_h\|_2.$$

Mit der Hermite-Interpolierenden $I_h u \in V_h$ gilt dann weiter für $u \in H^k(\Omega)$

$$\|u - u_h\|_2 \leq c \|u - I_h u\|_2 \leq ch^{k-2}|u|_k.$$

Damit haben wir die behauptete Fehlerabschätzung gezeigt. \square

Wir geben im folgenden Teil Abschätzungen für den Fehler in der L^2 -Norm und in der H^1 -Norm.

Satz 4.10. *Sei das Gebiet Ω H^k -regulär, $k = 3$ oder 4 . Dann gilt für die Lösung u von (3.11) und die Lösung $u_h \in V_h$ von (4.8) die Abschätzung*

$$\|u - u_h\|_s \leq ch^{2k-s-4}|u|_k, \quad s = 0 \text{ oder } 1.$$

Beweis. Wir wenden zum Beweis den Nitsche-Trick an und verwenden dazu das duale Problem (3.13). Dieses Problem hat eine eindeutige Lösung. Es gilt für alle $\varphi_h \in V_h \subset V$

$$|(g, u - u_h)| = |a_h(u - u_h, z)| = |a_h(u - u_h, z - \varphi_h)| \leq c\|z - \varphi_h\|_2\|u - u_h\|_2,$$

denn wegen der Galerkin-Orthogonalität (4.9) gilt $a_h(\varphi_h, u - u_h) = 0$. Sei nun $\varphi_h \in V_h$ die Bestapproximation in der Energienorm, dann lässt sich die Differenz folgendermaßen abschätzen:

$$\|z - \varphi_h\|_2 \leq ch^{k-s-2}\|z\|_{k-s}.$$

Mit der a-priori Abschätzung (3.16) gilt $\|z - \varphi_h\|_2 \leq ch^{k-s-2}\|g\|_{-s}$. Den Term $\|u - u_h\|_2$ hatten wir bereits in Satz 4.9 abgeschätzt. Zusammen ergibt das die Abschätzung

$$|(g, u - u_h)| \leq ch^{2k-s-4}\|g\|_{-s}|u|_k.$$

Es gilt aufgrund der Definition der Normen

$$\|u - u_h\|_s = \sup_{g \in H^{-s}} \frac{|(g, u - u_h)|}{\|g\|_{-s}} \leq ch^{2k-s-4}|u|_k, \quad s = 0 \text{ oder } 1.$$

Damit haben wir die behauptete Abschätzung gezeigt. □

Bemerkung 4.2. Für ein H^4 -reguläres Gebiet erhalten wir

$$\begin{aligned} \|u - u_h\| &\leq ch^4|u|_4, \\ \|u - u_h\|_1 &\leq ch^3|u|_4, \end{aligned}$$

für den L^2 - und den H^1 -Fehler.

4.2.4 Vor- und Nachteile

Aufgrund der Konformität verwendet dieses Verfahren (4.8) einen Polynomraum der Dimension 16. Da die Freiheitsgrade in den Eckpunkten liegen, werden die Systemmatrizen bei Verfeinerung nicht sehr schnell groß. Die Vorteile des in diesem Abschnitt beschriebenen Ansatzes sind seine Konvergenzordnungen. Wie sich diese auswirken und einen Vergleich zu den anderen Verfahren stellen wir in Kapitel 5 dar.

4.3 Beispiel eines nicht V -konformen Ansatzes

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir gesehen, dass ein konformer Ansatz sowohl Stetigkeit der Funktion als auch der Normalableitung fordert. Diese Anforderungen wollen wir etwas abschwächen und die Anzahl der Freiheitsgrade reduzieren. Dazu stellen wir das nichtkonforme Adini-Element vor.

4.3.1 Beschreibung des verwendeten Adini-Elements

Das Adini-Element verwendet die in der Abbildung 4.2 angegebenen Knotenfunktionale. Dies

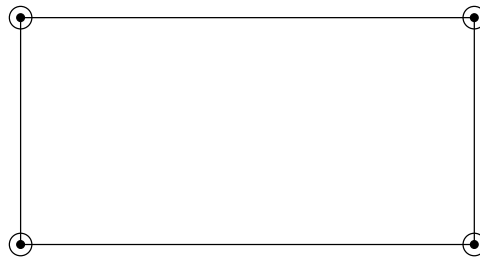


Abbildung 4.2: Adini-Element

sind zum einen Punktauswertungen \bullet und zum anderen Auswertungen der ersten Ableitungen \circ an jedem Eckpunkt. Der verwendete Polynomraum sieht wie folgt aus:

$$P(T) = P_3(T) \oplus \text{span} \{x_1 x_2^3, x_1^3 x_2\}.$$

Satz 4.11. Die Vorgabe des oben beschriebenen Polynomraums $P(T)$ und die Vorgabe der beschriebenen Knotenfunktionale $K(T)$ definieren einen unisolventen Finite-Elemente-Ansatz.

Beweis. Für den Beweis siehe (Ciarlet und Lions 1991) Kapitel VII, Abschnitt 49. \square

Wir benötigen zu dem Finiten Element, den Knotenfunktionalen und dem Polynomraum noch den Raum der Finiten-Element-Funktionen.

Satz 4.12. *Wir definieren folgende Finite-Elemente-Ansatzräume:*

$$V_h := \{ \varphi_h \in L^2(\Omega) \mid \varphi_h|_T \in P(T), \varphi_h \text{ und } \nabla \varphi_h \text{ stetig in den Eckpunkten der } T \in \mathcal{T}_h, \\ \varphi_h = \partial_n \varphi_h = 0 \text{ in Eckpunkten auf } \partial\Omega_E, \varphi_h = 0 \text{ in Eckpunkten auf } \partial\Omega_G \}.$$

Dieser mit dem Raum V_h definierte Ansatz ist nicht V -konform, jedoch gilt $V_h \subset C^0(\overline{\Omega})$.

Beweis. Die Inklusion $V_h \subset C^0(\overline{\Omega})$ folgt aus der Eindeutigkeit eines Polynoms entlang einer Kante. Denn jedes Polynom in V_h ist entlang einer Kante vom Grad ≤ 3 . Es ist auf einer Kante eindeutig durch die Vorgabe der Funktionswerte und die Werte der ersten Ableitung an den Eckpunkten der Kante bestimmt. Damit sind Übergänge von Zelle zu Zelle stetig und es gilt die Inklusion $V_h \subset C^0(\overline{\Omega})$. Es bleibt noch zu zeigen, dass der Ansatz nicht V -konform ist. Dazu zeigen wir, dass die Normalableitung keine stetigen Übergänge zwischen den Zellen besitzt. Entlang einer Kante ist die Normalableitung ein Polynom, das höchstens den Grad drei hat. Die Freiheitsgrade, die zur Bestimmung der Normalableitung zur Verfügung stehen, sind aber nur die zwei Ableitungswerte an den Endpunkten der Kante, es werden aber vier Freiheitsgrade benötigt, um dieses Polynom eindeutig zu bestimmen. Es können die Polynome $p(x) = -x^2 + x$ und $q(x) = x^2 - x$ als Normalableitungen vorkommen. Für beide Polynome gilt entlang einer Kante $[0, 1]$: $p(0) = q(0) = p(1) = q(1) = 0$, aber die Polynome sind nicht identisch. Somit kann der Ansatz nicht V -konform sein. \square

4.3.2 Beschreibung des Verfahrens

Da wir hier keinen V -konformen Ansatz betrachten, können wir nicht die Bilinearform

$$a(u, \varphi) = (\Delta u, \Delta \varphi) - (1 - \sigma) \left\{ (\partial_1^2 u, \partial_2^2 \varphi) + (\partial_2^2 u, \partial_1^2 \varphi) - 2(\partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_2 \varphi) \right\}$$

betrachten, sondern müssen die ursprüngliche Form so modifizieren, dass sie auf V_h definiert ist. Wir erweitern die Bilinearform wie folgt:

$$a_h(u, \varphi) := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[(\Delta u, \Delta \varphi)_T - (1 - \sigma) \left\{ (\partial_1^2 u, \partial_2^2 \varphi)_T + (\partial_2^2 u, \partial_1^2 \varphi)_T - 2(\partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_2 \varphi)_T \right\} \right], \quad (4.10)$$

dabei bedeutet der Index T , dass das Integrationsgebiet die Zelle T ist. Für Funktionen $u, \varphi \in H^2(\Omega)$ gilt

$$a_h(u, \varphi) = a(u, \varphi).$$

Diese Erweiterung ist daher sinnvoll. Die rechte Seite müssen wir nicht anpassen, denn wegen der Inklusion $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$ gilt für $\varphi \in V_h$

$$(f, \varphi) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (f, \varphi)_T.$$

Das Verfahren lautet nun:

Finde ein $u_h \in V_h$, so dass

$$a_h(u_h, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in V_h. \quad (4.11)$$

Im Gegensatz zum konformen Verfahren gilt für dieses Verfahren keine Galerkin-Orthogonalität, da der Finite-Elemente-Ansatzraum kein Teilraum von V ist. Bevor wir die eindeutige Lösbarkeit zeigen, führen wir das diskrete Skalarprodukt und die Norm

$$(\nabla^2 u, \nabla^2 \varphi)_h := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla^2 u, \nabla^2 \varphi)_T, \quad \|\nabla^2 \varphi\|_h^2 := (\nabla^2 \varphi, \nabla^2 \varphi)_h \quad (4.12)$$

ein. Dass dies tatsächlich eine Norm für $|\partial\Omega_E| > 0$ ist, erschließt sich wie folgt: Ist $\|\nabla^2 \varphi_h\|_h = 0$, so gilt $\nabla^2 \varphi_h|_T \equiv 0$ auf jeder Zelle T . Das heißt, dass φ_h linear auf jeder Zelle ist. Somit ist der Gradient von φ_h auf jeder Zelle konstant. Da nach Konstruktion des Adini-Elements die Ansatzfunktionen stetig entlang der Kanten sind, gilt $\varphi_h \in H^1(\Omega)$. In Zellen $T \in \mathcal{T}_h$, für die gilt $\partial T \cap \partial\Omega_E \neq \emptyset$, gilt wegen der vorgegebenen Randbedingungen $\nabla \varphi_h|_T \equiv 0$. Analog erschließt man $\varphi_h|_T \equiv 0$. Induktiv überträgt sich dies auf alle Zellen der Zerlegung, so dass $\varphi_h \equiv 0$ auf ganz Ω gilt. Damit ist gezeigt, dass $\|\nabla^2 \varphi_h\|_h$ eine Norm definiert.

Satz 4.13. *Falls gilt $|\partial\Omega_E| > 0$, ist die Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$ beschränkt und koerziv auf V_h , d. h. es gilt*

$$\begin{aligned} |a_h(u, \varphi)| &\leq c \|\nabla^2 u\|_h \|\nabla^2 \varphi\|_h, \\ a_h(\varphi, \varphi) &\geq \gamma \|\nabla^2 \varphi\|_h^2. \end{aligned}$$

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass die modifizierte Bilinearform bezüglich des diskreten Skalarproduktes (4.12) koerziv ist. Dazu führen wir den Ausdruck

$$a[u, \varphi] := \Delta u \Delta \varphi - (1 - \sigma)(\partial_1^2 u \partial_2^2 \varphi + \partial_2^2 u \partial_1^2 \varphi - 2\partial_1 \partial_2 u \partial_1 \partial_2 \varphi) \quad (4.13)$$

ein. Es gilt $a[u, \varphi] = a[\varphi, u]$ und außerdem

$$a[\varphi, \varphi] = (\partial_1^2 \varphi)^2 + (\partial_2^2 \varphi)^2 + 2(1 - \sigma)(\partial_1 \partial_2 \varphi)^2 + 2\sigma \partial_1^2 \varphi \partial_2^2 \varphi.$$

Unter der Verwendung der Youngschen Ungleichung gilt $2\sigma \partial_1^2 \varphi \partial_2^2 \varphi \geq -\sigma ((\partial_1^2 \varphi)^2 + (\partial_2^2 \varphi)^2)$.

Damit haben wir eine Abschätzung der Form

$$\begin{aligned} a[\varphi, \varphi] &= (\partial_1^2 \varphi)^2 + (\partial_2^2 \varphi)^2 + 2(1 - \sigma)(\partial_1 \partial_2 \varphi)^2 + 2\sigma \partial_1^2 \varphi \partial_2^2 \varphi \\ &\geq (1 - \sigma)(\partial_1^2 \varphi)^2 + (1 - \sigma)(\partial_2^2 \varphi)^2 + 2(1 - \sigma)(\partial_1 \partial_2 \varphi)^2 \\ &= (1 - \sigma)|\nabla^2 \varphi|^2. \end{aligned}$$

Mit der Definition von a_h gilt dann

$$a_h(u, \varphi) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T a[u, \varphi] \, dx.$$

Damit ist a_h bezüglich des diskreten Skalarproduktes koerziv

$$a_h(\varphi, \varphi) \geq (1 - \sigma) \|\nabla^2 \varphi\|_h^2 \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Damit bleibt noch zu zeigen, dass die Bilinearform beschränkt ist. Es gilt

$$\begin{aligned} |a[u, \varphi]| &\leq |\Delta u| |\Delta \varphi| + (1 - \sigma) |(\partial_1^2 u \partial_2^2 \varphi + \partial_2^2 u \partial_1^2 \varphi - 2\partial_1 \partial_2 u \partial_1 \partial_2 \varphi)| \\ &\leq c |\nabla^2 u| |\nabla^2 \varphi|. \end{aligned}$$

Mit der Hölderschen Ungleichung und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt, dass die Bilinearform beschränkt ist:

$$|a_h(u, \varphi)| \leq c \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T |\nabla^2 u| |\nabla^2 \varphi| \leq c \|\nabla^2 u\|_h \|\nabla^2 \varphi\|_h \quad \square$$

Bemerkung 4.3. Die Koerzivität der Bilinearform gilt auch für Funktionen aus V .

Nun können wir die eindeutige Lösbarkeit der Aufgabe (4.11) zeigen. Dazu werden wir wieder den Darstellungssatz von Riesz verwenden. Es ist zu zeigen, dass (f, \cdot) stetig bezüglich der diskreten Norm $\|\nabla^2 \cdot\|$ ist. Das sieht man wie folgt.

$$|(f, \varphi)| \leq \|f\| \|\varphi\| \leq c \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Für Funktionen φ aus V_h können wir die verallgemeinerte Poincarésche Ungleichung für φ anwenden. Da V_h ein endlichdimensionaler Raum ist, sind die Normen $\|\nabla \varphi\|$ und $\|\nabla^2 \varphi\|_h$ äquivalent. Daher gelten die Ungleichungen

$$\|\varphi\| \leq c \|\nabla \varphi\| \leq c \|\nabla^2 \varphi\|_h$$

mit einer von h abhängigen Konstante $c = c(h)$. Die Stetigkeit $|(f, \varphi)| \leq c \|\nabla^2 \varphi\|_h$ ist damit gezeigt.

Satz 4.14. *Das Problem (4.11) hat eine eindeutige Lösung $u_h \in V_h$, wenn gilt $|\partial\Omega_E| > 0$.*

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass (f, \cdot) stetig bezüglich des diskreten Skalarproduktes $\|\nabla^2 \cdot\|_h$ ist. In Satz 4.13 wurde gezeigt, dass die Bilinearform beschränkt und koerziv ist. Damit lässt sich der Darstellungssatz von Riesz anwenden. Dieser liefert die eindeutige Lösbarkeit von (4.11). \square

4.3.3 Fehlerabschätzungen

Für die Fehlerabschätzungen können wir nicht so vorgehen wie im konformen Fall, denn es gilt keine Galerkin-Orthogonalität, die wir verwenden könnten. Wir müssen daher eine aufwendigere Abschätzung der auftretenden Terme vornehmen. Der Einfachheit halber werden wir nur den Fall der rundherum eingespannten Platte betrachten. Die Resultate sind auf allgemeine Randbedingungen übertragbar. Die Abschätzungen, die im Folgenden gezeigt werden, können teilweise in (Lauscaux und Lesaint 1975) nachgelesen werden.

Satz 4.15. *Mit dem oben definierten diskreten Skalarprodukt gilt für die Lösung u von (3.11) und die Lösung u_h von (4.11) folgende Abschätzung*

$$\|\nabla^2(u - u_h)\|_h \leq c \left(\inf_{v \in V_h} \|\nabla^2(u - v)\|_h + \sup_{w \in V_h} \frac{|E_h(u, w)|}{\|\nabla^2 w\|_h} \right),$$

wobei $c > 0$ eine von h unabhängige Konstante ist. Die Form $E_h(\cdot, \cdot)$ ist definiert durch

$$E_h(u, w) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ ((1 - \sigma) \partial_t^2 u - \Delta u, \partial_n w)_{\partial T} - ((1 - \sigma) \partial_t \partial_n u, \partial_t w)_{\partial T} + (\partial_n \Delta u, w)_{\partial T} \right\}.$$

Beweis. Wir betrachten den Ausdruck X_h , der für ein beliebiges aber festes $v \in V_h$ definiert ist durch

$$X_h = a_h(u_h - v, u_h - v).$$

Wir haben bereits gezeigt, dass gilt $X_h \geq (1 - \sigma) \|\nabla^2(u_h - v)\|_h^2$. Weiter gilt für $\psi = u_h - v$

$$\begin{aligned} X_h &= a_h(\psi, \psi) = a_h(u_h, \psi) - a_h(v, \psi) \\ &= (f, \psi) - a_h(v, \psi) = a_h(u - v, \psi) + (f, \psi) - a_h(u, \psi). \end{aligned}$$

Die letzten zwei Summanden ergeben

$$(f, \psi) - a_h(u, \psi) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ (\Delta^2 u, \psi)_T - (\Delta u, \Delta \psi)_T + (1 - \sigma) [(\partial_1^2 u, \partial_2^2 \psi)_T + (\partial_1^2 \psi, \partial_2^2 u) - 2(\partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_2 \psi)_T] \right\}.$$

Durch Anwendung der Greenschen Formel auf jede Zelle $T \in \mathcal{T}_h$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (f, \psi) - a_h(u, \psi) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ (-\Delta u, \partial_n \psi)_{\partial T} + (\partial_n \Delta u, \psi) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \sigma) [(\partial_n \psi, \partial_t^2 u)_{\partial T} - (\partial_t \psi, \partial_t \partial_n u)_{\partial T}] \right\} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ ((1 - \sigma) \partial_t^2 u - \Delta u, \partial_n \psi)_{\partial T} + (\partial_n \Delta u, \psi)_{\partial T} \right. \\ &\quad \left. - ((1 - \sigma) \partial_t \partial_n u, \partial_t \psi)_{\partial T} \right\}. \end{aligned}$$

Es gilt aufgrund der Definition von $E_h(\cdot, \cdot)$:

$$(f, \psi) - a_h(u, \psi) = E_h(u, \psi) \quad \forall \psi \in V_h. \quad (4.14)$$

Damit ergibt sich wegen der Beschränktheit der Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$ für den Fehler, den wir abschätzen, durch Rücksubstitution $\psi = u_h - v$

$$\begin{aligned} (1 - \sigma) \|\nabla^2(v - u_h)\|_h^2 &\leq X_h = a_h(u - v, u_h - v) + E_h(u, u_h - v) \\ &\leq \|\nabla^2(u - v)\|_h \|\nabla^2(u_h - v)\|_h + E_h(u, u_h - v). \end{aligned}$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\nabla^2(u_h - v)\|_h &\leq c \|\nabla^2(u - v)\|_h + c \frac{|E_h(u, u_h - v)|}{\|\nabla^2(u_h - v)\|_h} \\ &\leq c \|\nabla^2(u - v)\|_h + \sup_{w \in V_h} \frac{|E_h(u, w)|}{\|\nabla^2 w\|_h}. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung

$$\|\nabla^2(u - u_h)\|_h \leq \|\nabla^2(u - v)\|_h + \|\nabla^2(u_h - v)\|_h$$

folgt die behauptete Abschätzung. □

Für die Abschätzung des Fehlers in der H^1 -Norm bekommen wir folgendes Resultat.

Satz 4.16. *Sei das Gebiet Ω H^3 -regulär, sei u die Lösung von (3.11), u_h die Lösung von*

(4.11). Dann gilt mit der dualen Lösung z von (3.13) die folgende Abschätzung

$$\|u - u_h\|_1 \leq c \sup_{z \in H^3(\Omega)} \left\{ \inf_{z_h \in V_h} \frac{|a_h(u - u_h, z - z_h) + E_h(z, u - u_h) - E_h(u, z - z_h)|}{\|z\|_3} \right\}.$$

Beweis. Mit dem klassischen Dualitätsargument gilt

$$\|u - u_h\|_1 = \sup_{g \in H^{-1}(\Omega)} \frac{|(u - u_h, g)|}{\|g\|_{-1}}.$$

Sei z die Lösung des dualen Problems (3.13). Dann gilt mit (4.14) für das diskrete duale Problem

$$(u - u_h, g) = a_h(u - u_h, z) + E_h(z, u - u_h). \quad (4.15)$$

Mit (4.14) folgt für $z_h \in V_h$, dass gilt

$$(f, z_h) - a_h(u, z_h) = E_h(u, z_h) \quad \forall z_h \in V_h.$$

Setzen wir z_h als Testfunktion in das diskrete Verfahren (4.11) ein, gilt $(f, z_h) = a_h(u_h, z_h)$. Damit folgt

$$a_h(u_h, z_h) - a_h(u, z_h) = E_h(u, z_h) \quad \forall z_h \in V_h.$$

Für obige Gleichung (4.15) ergibt sich somit

$$(u - u_h, g) = a_h(u - u_h, z - z_h) + E_h(z, u - u_h) - E_h(u, z_h).$$

Da aufgrund der Randbedingungen von u und z der Term $E_h(u, z)$ verschwindet, kann dieser eingeschoben werden und wir erhalten

$$(u - u_h, g) = a_h(u - u_h, z - z_h) + E_h(z, u - u_h) - E_h(u, z_h - z).$$

Damit ergibt sich wegen der a priori Abschätzung $\|z\|_3 \leq c\|g\|_{-1}$ die behauptete Abschätzung. \square

Für die vollständige Konvergenzanalyse müssen noch die Terme in

$$a_h(u - u_h, z - z_h), \quad E_h(z, u - u_h) \quad \text{und} \quad E_h(u, z_h - z)$$

abgeschätzt werden. Wir benötigen dazu die Darstellung der Finite-Elemente-Funktionen auf der Referenzzelle $[-1, 1]^2$ durch die Basispolynome. Jedes $\varphi_h \in V_h$ lässt sich in der folgenden

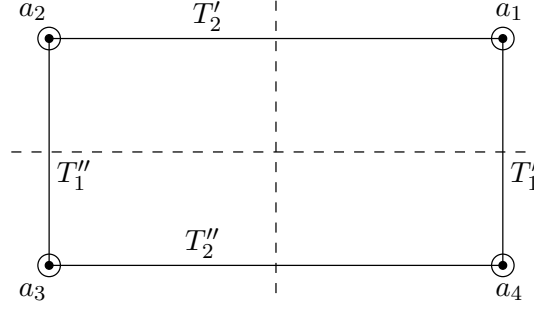


Abbildung 4.3: Adini-Element mit Beschriftung der Seiten

Form darstellen:

$$\varphi_h = \sum_{i=1}^4 \varphi_h(a_i) \hat{p}_i + \sum_{|j-i| \equiv 1 \pmod{4}} (a_j - a_i) D\varphi_h(a_i) \hat{p}_{ij},$$

wobei die Punkte a_i in Abbildung 4.3 dargestellt sind. Es sind $\varphi_h(a_i)$ die Funktionswerte und $D\varphi_h(a_i)$ die Werte der Ableitung an den Eckpunkten a_i von φ_h . Die Basispolynome auf der Referenzzelle sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \hat{p}_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)\left(1 + \frac{\xi + \eta}{2} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right), \\ \hat{p}_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)\left(1 + \frac{-\xi + \eta}{2} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right), \\ \hat{p}_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)\left(1 + \frac{-\xi - \eta}{2} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right), \\ \hat{p}_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)\left(1 + \frac{\xi - \eta}{2} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right), \\ \hat{p}_{12}(\xi, \eta) &= \frac{1}{8}(1 + \eta)(1 + \xi)^2(1 - \xi), & \hat{p}_{21}(\xi, \eta) &= \frac{1}{8}(1 + \eta)(1 - \xi)^2(1 + \xi), \\ \hat{p}_{34}(\xi, \eta) &= \frac{1}{8}(1 - \eta)(1 - \xi)^2(1 + \xi), & \hat{p}_{43}(\xi, \eta) &= \frac{1}{8}(1 - \eta)(1 + \xi)^2(1 - \xi), \\ \hat{p}_{14}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)^2(1 - \eta), & \hat{p}_{41}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)^2(1 + \eta), \\ \hat{p}_{23}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)^2(1 - \eta), & \hat{p}_{32}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)^2(1 + \eta). \end{aligned}$$

Die Polynome \hat{p}_i realisieren jeweils die Funktionswerte an den Eckpunkten a_i , die Polynome \hat{p}_{ij} realisieren die Ableitung an den Punkten a_i in Richtung des Punktes a_j . Dabei verschwinden die Funktionswerte der Polynome \hat{p}_{ij} an allen Eckpunkten, sowie die Ableitungen der Polynome \hat{p}_i an allen Eckpunkten. Zuerst zeigen wir, dass das Adini-Element den sogenannten Patch-Test erfüllt.

Satz 4.17 (Patch-Test). Für jedes Polynom $u \in P_2$ und $\varphi_h \in V_h$ gilt

$$E_h(u, \varphi_h) = 0.$$

Beweis. Da V_h ein Teilraum von $C^0(\overline{\Omega})$ ist, lässt sich $E_h(u, \varphi_h)$ schreiben als

$$E_h(u, \varphi_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} ((1 - \sigma) \partial_t^2 u - \Delta u, \partial_n \varphi_h)_{\partial T}.$$

Die restlichen Terme fallen aufgrund der Stetigkeit, der Stetigkeit der Tangentialableitung und der Randbedingungen weg. Sei Λ_T die $Q_1(T)$ -Interpolierende auf jeder Zelle $T \in \mathcal{T}_h$. Dann schreiben wir

$$E_h(u, \varphi_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} E_T(u, \varphi_h), \quad \forall (u, \varphi_h) \in H^3(\Omega) \times V_h,$$

wobei $E_T(\cdot, \cdot)$ gegeben ist durch

$$E_T(u, \varphi_h) = \Delta_{1,T}(u, \partial_1 \varphi_h) + \Delta_{2,T}(u, \partial_2 \varphi_h) \quad \forall (u, \varphi_h) \in H^3(\Omega) \times V_h,$$

mit

$$\Delta_{j,T}(u, \partial_j \varphi_h) = ((1 - \sigma) \partial_t^2 u - \Delta u, \partial_j \varphi_h - \Lambda \partial_j \varphi_h)_{T_j'} - ((1 - \sigma) \partial_t^2 u - \Delta u, \partial_j \varphi_h - \Lambda \partial_j \varphi_h)_{T_j''}$$

Wir können hier die Q_1 -Interpolierende einschieben, da sowohl der Sprung über die Kanten der Zellen als auch die Werte am Rand verschwinden. Es gilt aufgrund der Definition des Interpolationsoperators

$$\Delta_{j,T}(u, \varphi_h) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \forall u \in H^3(T), \varphi_h \in Q_1(T).$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass

$$\Delta_{j,T}(u, \varphi_h) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \forall u \in P_2(T), \varphi_h \in \partial_j V_h, \quad (4.16)$$

gilt. Dabei ist $\partial_j V_h$ der Raum aller Ableitungen der Funktionen aus V_h :

$$\partial_j V_h = \{\partial_j \varphi_h \mid \varphi_h \in V_h\}, \quad j = 1, 2.$$

Beide Räume enthalten den Raum $Q_1(T)$. Für $u \in P_2(T)$ sind die zweiten Ableitungen

konstant, damit genügt es zu zeigen, dass

$$\int_{T'_j} (\varphi_h - \Lambda\varphi_h) ds = \int_{T''_j} (\varphi_h - \Lambda\varphi_h) ds, \quad j = 1, 2, \quad \forall \varphi_h \in \partial_j V_h \quad (4.17)$$

gilt. Haben wir gezeigt, dass obige Gleichung gilt, folgt damit auch (4.16). Wir zeigen nun (4.17) beispielhaft für $j = 1$. Jedes $\varphi_h \in \partial_1 V_h$ ist von der Form

$$\varphi_h = \gamma_0(x_1) + \gamma_1(x_1)x_2 + \gamma_2x_2^2 + \gamma_3x_2^3,$$

wobei γ_0 und γ_1 Polynome vom Grad ≤ 2 in der Variablen x_1 sind. Gegeben sei eine Funktion r auf einer Seite T' , mit $\lambda_{T'}(r)$ sei die lineare Funktion entlang T' bezeichnet, die dieselben Werte wie die Funktion r an den Eckpunkten von T' besitzt. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\varphi_h - \Lambda_T\varphi_h)|_{T'_1}(x_2) &= \gamma_0(x_1) - \lambda_{T'_1}(\gamma_0(x_1)) + \gamma_1(x_1)x_2 - \lambda_{T'_1}(\gamma_1(x_1)x_2) \\ &\quad + \gamma_2x_2^2 + \gamma_3x_2^3 - \lambda_{T'_1}(\gamma_2x_2^2 + \gamma_3x_2^3). \end{aligned}$$

Da die konstanten und linearen Polynome von $\lambda_{T'}$ exakt interpoliert werden, gilt

$$\begin{aligned} \gamma_0(x_1) - \lambda_{T'_1}(\gamma_0(x_1)) &= 0, \\ \gamma_1(x_1)x_2 - \lambda_{T'_1}(\gamma_1(x_1)x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$(\varphi_h - \Lambda_T\varphi_h)|_{T'_1}(x_2) = \gamma_2x_2^2 + \gamma_3x_2^3 - \lambda_{T'_1}(\gamma_2x_2^2 + \gamma_3x_2^3),$$

und damit

$$(\varphi_h - \Lambda_T\varphi_h)|_{T'_1}(x_2) = (\varphi_h - \Lambda_T\varphi_h)|_{T'_1}(x_2).$$

Dies impliziert (4.17). Wir haben somit gezeigt, dass

$$\Delta_{j,T}(u, \varphi_h) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \forall u \in P_2(T), \varphi_h \in \partial_j V_h.$$

Es gilt daher

$$\begin{aligned} E_h(u, \varphi_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} E_T(u, \varphi_h) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\Delta_{1,T}(u, \partial_1\varphi_h) + \Delta_{2,T}(u, \partial_2\varphi_h)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist. \square

Bemerkung 4.4. Später werden wir zeigen, dass für eine Zerlegung in Rechtecke sogar gilt:

$$E_h(u, \varphi_h) = 0 \quad \forall u \in P_3 \text{ und } \forall \varphi_h \in V_h.$$

Wir können die Terme $E_h(u, \varphi_h)$ weiter abschätzen.

Satz 4.18. *Es gelten die folgenden Abschätzungen*

$$E_h(u, \varphi_h) \leq ch^2 |u|_3 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\varphi_h|_{3,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.18)$$

$$E_h(u, \varphi_h) \leq ch |u|_3 \|\nabla^2 \varphi_h\|_h, \quad (4.19)$$

für alle $u \in H^3(\Omega)$ und $\varphi_h \in V_h$.

Beweis. Wir benutzen dieselbe Notation wie im Beweis von Satz 4.17. Dort hatten wir gezeigt, dass gilt

$$\begin{aligned} E_h(u, \varphi_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} E_T(u, \varphi_h) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\Delta_{1,T}(u, \partial_1 \varphi_h) + \Delta_{2,T}(u, \partial_2 \varphi_h)). \end{aligned}$$

Dabei waren $\Delta_{1,T}(u, \partial_1 \varphi_h)$ und $\Delta_{2,T}(u, \partial_2 \varphi_h)$ definiert als

$$\Delta_{j,T}(u, \partial_j \varphi_h) = ((1 - \sigma) \partial_t^2 u - \Delta u, \partial_j \varphi_h - \Lambda \partial_j \varphi_h)_{T_j'} - ((1 - \sigma) \partial_t^2 u - \Delta u, \partial_j \varphi_h - \Lambda \partial_j \varphi_h)_{T_j''}.$$

Um $\Delta_{1,T}(u, \partial_1 \varphi_h)$ und $\Delta_{2,T}(u, \partial_2 \varphi_h)$ abzuschätzen, reicht es mit

$$z = (1 - \sigma) \partial_t^2 u - \Delta u \text{ und } q = \partial_j \varphi_h$$

folgende Größen abzuschätzen:

$$\delta_{j,T}(z, q) = (z, q - \Lambda_T q)_{T_j'} - (z, q - \Lambda_T q)_{T_j''}, \quad \text{für } z \in H^1(T), q \in \partial_j V_h, j = 1, 2. \quad (4.20)$$

Verwenden wir die Beziehungen zwischen Funktionen auf der realen Zelle und der Referenzzelle, erhalten wir folgende Ungleichung (Funktionen und Variablen auf der Referenzzelle werden mit einem „ $\hat{\cdot}$ “ gekennzeichnet)

$$\delta_{j,T}(z, q) \leq h \delta_{j,\hat{T}}(\hat{z}, \hat{q}), \quad j = 1, 2.$$

Dabei beachte man, dass eine Funktion \hat{q} zum Raum $\partial_j P(\hat{T})$ gehört, wenn die Funktion q im Raum $\partial_j P(T)$ liegt. Wir erinnern daran, dass wir mit $P(T)$ den Polynomraum, der durch das Adini-Element gegeben ist, bezeichnen. Überträgt man die Resultate aus Satz 4.17, erhält man

$$\begin{aligned}\delta_{j,\hat{T}}(\hat{z}, \hat{q}) &= 0, \quad \forall \hat{z} \in H^1(\hat{T}), \hat{q} \in P_1(\hat{T}), \\ \delta_{j,\hat{T}}(\hat{z}, \hat{q}) &= 0, \quad \forall \hat{z} \in P_0(\hat{T}), \hat{q} \in \partial_j P(\hat{T}).\end{aligned}$$

Versehen wir den Raum $\partial_j P(T)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{1,T}$, dann gilt mit der Spurabschätzung

$$|\delta_{j,\hat{T}}(\hat{z}, \hat{q})| \leq c \|\hat{z}\|_{L^2(\partial\hat{T})} \|\hat{q}\|_{L^2(\partial\hat{T})} \leq c \|\hat{z}\|_{1,\hat{T}} \|\hat{q}\|_{1,\hat{T}}.$$

Damit sind die Voraussetzungen für Satz 4.3 gegeben und wir erhalten für $l = 1$, $k = 0$, $\Omega = \hat{T}$ und $W = \partial_j P(\hat{T})$ die Abschätzungen

$$|\delta_{j,\hat{T}}(\hat{z}, \hat{q})| \leq c |\hat{z}|_{1,\hat{T}} |\hat{q}|_{2,\hat{T}}, \quad \forall \hat{z} \in H^1(\hat{T}), \hat{q} \in \partial_j P(\hat{T}).$$

Daraus ergibt sich die Abschätzung für die reale Zelle

$$\delta_{j,T}(z, q) \leq h \delta_{j,\hat{T}}(\hat{z}, \hat{q}) \leq ch |\hat{z}|_{1,\hat{T}} |\hat{q}|_{2,\hat{T}} \leq ch^2 |z|_{1,T} |q|_{2,T},$$

da wir verwenden können, dass

$$|\hat{z}|_{1,\hat{T}} \leq c |z|_{1,T}, \quad |\hat{q}|_{2,\hat{T}} \leq ch |q|_{2,T}$$

gilt, vergleiche (Rannacher 2000/01). Beispielhaft geben wir eine Analyse für $j = 1$. Der andere Fall folgt analog. Seien $u \in H^3(T)$ und $p \in P(T)$ zwei gegebene Funktionen. Dann gehören

$$z = (1 - \sigma)\partial_2^2 u - \Delta u \text{ und } q = \partial_1 \varphi_h$$

zu den Räumen $H^1(T)$ bzw. $\partial_1 P(T)$. Damit gilt

$$|\Delta_{1,T}(u, \varphi_h)| = |\delta_{1,T}((1 - \sigma)\partial_2^2 u - \Delta u, \partial_1 \varphi_h)| \leq ch^2 |u|_3 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\varphi_h|_{3,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

so dass die erste behauptete Ungleichung gezeigt ist. Mit der inversen Abschätzung (4.2)

$$|\varphi_h|_{3,T} \leq ch^{-1} |\varphi_h|_{2,T}$$

folgt die zweite behauptete Ungleichung. □

Nachfolgend betrachten wir die Situation auf gleichförmigen Rechtecken, wie Abbildung 4.4 darstellt. Dazu sei nun Ω das Gebiet $(0, a) \times (0, b)$. Dies teilen wir wie folgt auf:

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 < x_1 < \dots < x_I = a, \\ 0 &= y_0 < y_1 < \dots < y_J = b. \end{aligned}$$

In Ω definieren wir die Punkte $a_{i,j}$, $0 \leq i \leq I$, $0 \leq j \leq J$ an den Koordinaten (x_i, y_j) . Sei nun

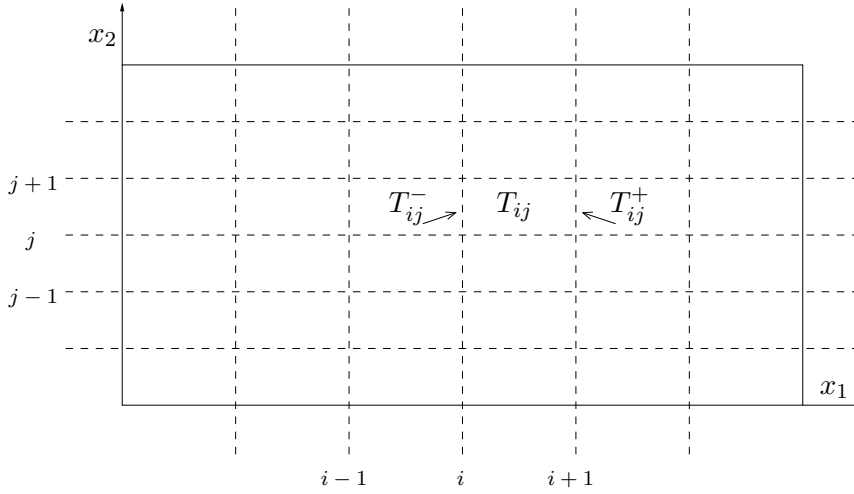


Abbildung 4.4: Zerlegung des Gebietes Ω in gleichförmige Rechtecke

T_{ij} das Rechteck mit den Eckpunkten $a_{i,j}, a_{i+1,j}, a_{i,j+1}, a_{i+1,j+1}$. Zur Abkürzung definieren wir

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j} &:= \varphi_h(a_{i,j}), & 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J, \\ D\varphi_{j,j+1}^i &:= (a_{i,j+1} - a_{i,j})D\varphi_h(a_{i,j}) & 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J-1, \\ D\varphi_{j+1,j}^i &:= (a_{i,j} - a_{i,j+1})D\varphi_h(a_{i,j+1}) & 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J-1. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Wir schreiben nun den Ausdruck $E_h(u, \varphi)$ als

$$E_h(u, \varphi_h) = E_h^1(u, \partial_1 \varphi_h) + E_h^2(u, \partial_2 \varphi_h),$$

wobei definiert ist

$$E_h^j(u, \partial_j \varphi_h) := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \{((1-\sigma)\partial_t^2 - \Delta u, \partial_j \varphi_h)_{T_j'} - ((1-\sigma)\partial_t^2 - \Delta u, \partial_j \varphi_h)_{T_j''}\}, \quad j = 1, 2.$$

T_j' und T_j'' sind jeweils gegenüberliegende Seiten im Rechteck, wie Abbildung 4.3 zeigt.

Exemplarisch führen wir eine Abschätzung für $E_h^1(u, \varphi_h)$ durch. Analog verfahren wir für $E_h^2(u, \varphi_h)$. Durch Summation ergibt sich

$$E_h^1(u, \varphi_h) = \sum_{j=0}^{J-1} E_j(u, \varphi_j),$$

mit

$$E_j(u, \varphi_h) = \sum_{i=0}^{I-1} \left(\int_{\partial T_{ij}^-} g_i(y) \partial_n \varphi_h dy - \int_{\partial T_{ij}^+} g_{i+1}(y) \partial_n \varphi_h dy \right),$$

wobei ∂T_{ij}^+ und ∂T_{ij}^- im Rechteck T_{ij} gegenüberliegende Seiten sind, wie Abbildung 4.4 darstellt. Die Funktionen $g_i(y)$ sind gerade $g_i(y) = ((1 - \sigma) \partial_2^2 u - \Delta u)(x_i, y)$. Durch Transformation auf die Referenzzelle werden wir obige Terme abschätzen. Dazu benötigen wir die Transformation der Koordinaten x, y auf die Koordinaten der Referenzzelle ξ, η gegeben als

$$\xi = \frac{2x - (x_i + x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}, \quad \eta = \frac{2y - (y_j + y_{j+1})}{y_{j+1} - y_j}.$$

Sei $F(\xi, \eta) = (x, y)$, dann ist

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(y_{j+1} - y_j) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\nabla F)^{-1} = \begin{pmatrix} 2(x_{i+1} - x_i)^{-1} & 0 \\ 0 & 2(y_{j+1} - y_j)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Damit können wir die einzelnen Integrale transformieren. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial T_{ij}^-} g_i(y) n \nabla \varphi_h(x_i, y) dy &= \int_{-1}^1 \hat{g}_i(\eta) \hat{n} (\nabla F)^{-1} (\nabla F)^{-1} \begin{pmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\eta \end{pmatrix} \varphi_h(-1, \eta) \det \nabla F d\eta \\ &= - \int_{-1}^1 \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{i+1} - x_i} \hat{g}_i(\eta) \partial_\xi \varphi_h(-1, \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Analog lässt sich das zweite Integral transformieren zu

$$\int_{\partial T_{ij}^+} g_{i+1}(y) n \nabla \varphi_h(x_{i+1}, y) dy = \int_{-1}^1 \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{i+1} - x_i} \hat{g}_{i+1}(\eta) \partial_\xi \varphi_h(1, \eta) d\eta.$$

Damit ergibt sich folgende Summe

$$E_j(u, \varphi_h) = (y_{j+1} - y_j) \sum_{i=0}^{I-1} \int_{-1}^1 \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \{ \hat{g}_{i+1}(\eta) \partial_\xi \varphi_h(1, \eta) - \hat{g}_i(\eta) \partial_\xi \varphi_h(-1, \eta) \} d\eta, \quad (4.22)$$

die abzuschätzen ist. Dazu berechnen wir explizit die Ableitungen $\partial_\xi \varphi_h(1, \eta)$ und $\partial_\xi \varphi_h(-1, \eta)$.

$$\begin{aligned} \partial_\xi \hat{p}_1(1, \eta) &= \frac{1}{8} \eta(1 - \eta^2), & \partial_\xi \hat{p}_1(-1, \eta) &= \frac{1}{8} \eta(1 - \eta^2), \\ \partial_\xi \hat{p}_2(1, \eta) &= -\frac{1}{8} \eta(1 - \eta^2), & \partial_\xi \hat{p}_2(-1, \eta) &= -\frac{1}{8} \eta(1 - \eta^2), \\ \partial_\xi \hat{p}_3(1, \eta) &= \frac{1}{8} \eta(1 - \eta^2), & \partial_\xi \hat{p}_3(-1, \eta) &= \frac{1}{8} \eta(1 - \eta^2), \\ \partial_\xi \hat{p}_4(1, \eta) &= -\frac{1}{8} \eta(1 - \eta^2), & \partial_\xi \hat{p}_4(-1, \eta) &= -\frac{1}{8} \eta(1 - \eta^2), \\ \partial_\xi \hat{p}_{12}(1, \eta) &= -\frac{1}{2}(1 + \eta), & \partial_\xi \hat{p}_{12}(-1, \eta) &= 0, \\ \partial_\xi \hat{p}_{14}(1, \eta) &= -\frac{1}{8}(1 + \eta)^2(1 - \eta), & \partial_\xi \hat{p}_{14}(-1, \eta) &= -\frac{1}{8}(1 + \eta)^2(1 - \eta), \\ \partial_\xi \hat{p}_{21}(1, \eta) &= 0, & \partial_\xi \hat{p}_{21}(-1, \eta) &= -\frac{1}{2}(1 + \eta), \\ \partial_\xi \hat{p}_{23}(1, \eta) &= \frac{1}{8}(1 + \eta)^2(1 - \eta), & \partial_\xi \hat{p}_{23}(-1, \eta) &= \frac{1}{8}(1 + \eta)^2(1 - \eta), \\ \partial_\xi \hat{p}_{32}(1, \eta) &= \frac{1}{8}(1 - \eta)^2(1 + \eta), & \partial_\xi \hat{p}_{32}(-1, \eta) &= \frac{1}{8}(1 - \eta)^2(1 + \eta), \\ \partial_\xi \hat{p}_{34}(1, \eta) &= 0, & \partial_\xi \hat{p}_{34}(-1, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \eta), \\ \partial_\xi \hat{p}_{41}(1, \eta) &= -\frac{1}{8}(1 - \eta)^2(1 + \eta), & \partial_\xi \hat{p}_{41}(-1, \eta) &= -\frac{1}{8}(1 - \eta)^2(1 + \eta), \\ \partial_\xi \hat{p}_{43}(1, \eta) &= -\frac{1}{2}(1 - \eta), & \partial_\xi \hat{p}_{43}(-1, \eta) &= 0. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Darstellung der Ableitungen $\partial_\xi \varphi_h(1, \eta)$ sowie $\partial_\xi \varphi_h(-1, \eta)$ und können

mit den Definitionen in (4.21) schreiben

$$\begin{aligned}
\partial_\xi \varphi_h(1, \eta) &= \frac{1}{8} \eta (1 - \eta^2) (\varphi_{i+1, j+1} - \varphi_{i, j+1} + \varphi_{i, j} - \varphi_{i+1, j}) \\
&\quad + \frac{1}{2} (1 + \eta) (a_{i+1, j+1} - a_{i, j+1}) D\varphi_h(a_{i, j+1}) \\
&\quad + \frac{1}{2} (1 - \eta) (a_{i+1, j} - a_{i, j}) D\varphi_h(a_{i, j}) \\
&\quad - \frac{1}{8} (1 - \eta^2 + \eta - \eta^3) D\varphi_{j+1, j}^{i+1} - \frac{1}{8} (1 - \eta^2 - \eta + \eta^3) D\varphi_{j, j+1}^{i+1} \\
&\quad + \frac{1}{8} (1 - \eta^2 + \eta - \eta^3) D\varphi_{j+1, j}^i + \frac{1}{8} (1 - \eta^2 - \eta + \eta^3) D\varphi_{j, j+1}^i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\xi \varphi_h(-1, \eta) &= \frac{1}{8} \eta (1 - \eta^2) (\varphi_{i+1, j+1} - \varphi_{i, j+1} + \varphi_{i, j} - \varphi_{i+1, j}) \\
&\quad - \frac{1}{2} (1 + \eta) (a_{i, j+1} - a_{i+1, j+1}) D\varphi_h(a_{i+1, j+1}) \\
&\quad - \frac{1}{2} (1 - \eta) (a_{i, j} - a_{i+1, j}) D\varphi_h(a_{i+1, j}) \\
&\quad - \frac{1}{8} (1 - \eta^2 + \eta - \eta^3) D\varphi_{j+1, j}^{i+1} - \frac{1}{8} (1 - \eta^2 - \eta + \eta^3) D\varphi_{j, j+1}^{i+1} \\
&\quad + \frac{1}{8} (1 - \eta^2 + \eta - \eta^3) D\varphi_{j+1, j}^i + \frac{1}{8} (1 - \eta^2 - \eta + \eta^3) D\varphi_{j, j+1}^i.
\end{aligned}$$

Für Formel (4.22) ergibt sich unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\begin{aligned}
E_j(u, \varphi_h) &= E_j'(u, \varphi_h) + E_j''(u, \varphi_h), \\
E_j'(u, \varphi_h) &= (y_{j+1} - y_j) \sum_{i=0}^{I-1} \left(\int_{-1}^1 \frac{\eta(1-\eta^2)}{8} \frac{\hat{g}_i(\eta) - \hat{g}_{i+1}(\eta)}{x_{i+1} - x_i} d\eta \right) b_{ij}, \\
E_j''(u, \varphi_h) &= (y_{j+1} - y_j) \sum_{i=0}^{I-1} \left(\int_{-1}^1 \frac{1-\eta^2}{8} \frac{\hat{g}_i(\eta) - \hat{g}_{i+1}(\eta)}{x_{i+1} - x_i} d\eta \right) c_{ij},
\end{aligned} \tag{4.23}$$

für $1 \leq j \leq J-1$, $u \in H^3(\Omega)$ und $\varphi_h \in V_h$ sowie den Definitionen

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= -\varphi_{i+1, j+1} + \varphi_{i, j+1} - \varphi_{i, j} + \varphi_{i+1, j} + D\varphi_{j+1, j}^{i+1} - D\varphi_{j, j+1}^{i+1} - D\varphi_{j+1, j}^i + D\varphi_{j, j+1}^i \\
c_{ij} &= D\varphi_{j+1, j}^{i+1} + D\varphi_{j, j+1}^{i+1} - D\varphi_{j+1, j}^i - D\varphi_{j, j+1}^i,
\end{aligned}$$

für $0 \leq i, j \leq I-1, J-1$. Die auftretenden Terme können wir abschätzen durch

$$|b_{ij}| = \left| \int_{\hat{T}} \eta \partial_\xi \partial_\eta^2 \hat{\varphi}_{ij} d\xi d\eta \right| \leq c |\hat{\varphi}_h|_{3, \hat{T}_{ij}} \leq ch^2 |\varphi_h|_{3, T_{ij}},$$

$$|c_{ij}| = \left| \int_{\hat{T}} \partial_\xi \partial_\eta^2 \hat{\varphi}_{ij} d\xi d\eta \right| \leq c |\hat{\varphi}_h|_{3, \hat{T}_{ij}} \leq ch^2 |\varphi_h|_{3, T_{ij}},$$

$$|D\varphi_{j+1,j}^i + D\varphi_{j,j+1}^i| = \left| - \int_{-1}^1 \partial_\eta^2 \hat{\varphi}_{ij}(-1, \eta) d\eta \right| \leq c |\hat{\varphi}_h|_{2, \hat{T}_{ij}} \leq ch |\varphi_h|_{2, T_{ij}}.$$

Dies werden wir verwenden für die weitere Analyse.

Satz 4.19. Für die in (4.23) definierten Terme erhalten wir die Abschätzungen

$$|E'_j(u, \varphi_h)| \leq ch^{k+1} |g|_{k, \Omega_j} \left(\sum_{T \in \Omega_j} |\varphi_h|_{3, T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k = 1 \text{ oder } 2, \quad (4.24)$$

$$|E''_j(u, \varphi_h)| \leq ch^2 |g|_{1, \Omega_j} \left(\sum_{T \in \Omega_j} |\varphi_h|_{3, T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.25)$$

für $\Omega_j = \bigcup_{0 \leq i \leq I-1} T_{ij}$, $g \in H^2(\Omega)$ und $\varphi_h \in V_h$. Ist die Zerlegung gleichförmig, d. h. $x_{i+1} - x_i = \Delta x$, $0 \leq i \leq I-1$, dann erhalten wir

$$|E''_j(u, \varphi_h)| \leq ch^2 |g|_{2, \Omega_j} \left(\sum_{T \in \Omega_j} |\varphi_h|_{2, T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.26)$$

Beweis. Es gilt

$$\int_{-1}^1 \eta(1-\eta^2)(\hat{g}_i - \hat{g}_{i+1}) d\eta = 0 \quad \forall \hat{g}(\xi, \eta) \in P_1,$$

da für $\hat{g}_i, \hat{g}_{i+1} \in P_1$ die Differenz $\hat{g}_i - \hat{g}_{i+1}$ konstant ist, so dass obiges Integral aus Symmetriegründen verschwindet. Weiter gilt

$$\int_{-1}^1 (1-\eta^2)(\hat{g}_i - \hat{g}_{i+1}) d\eta = 0 \quad \forall \hat{g}(\xi, \eta) \in P_0,$$

denn $\hat{g}_i - \hat{g}_{i+1} = 0$ für \hat{g}_i und $\hat{g}_{i+1} \in P_0$. Damit gilt nach dem Lemma von Bramble-Hilbert

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 \eta(1-\eta^2)(\hat{g}_i - \hat{g}_{i+1})d\eta \right| &\leq ch^{k-1}|g|_{k,T_{ij}}, \quad k = 1 \text{ oder } 2, \\ \left| \int_{-1}^1 (1-\eta^2)(\hat{g}_i - \hat{g}_{i+1})d\eta \right| &\leq |g|_{1,T_{ij}} \end{aligned}$$

für alle $T_{ij} \in \Omega_j$. Dies verwenden wir zur Abschätzung von E'_j und E''_j :

$$\begin{aligned} |E'_j(u, \varphi_h)| &\leq ch^{k+1} \sum_{i=0}^{I-1} |g|_{k,T_{ij}} |\varphi_h|_{3,T_{ij}} \\ &\leq ch^{k+1} |g|_{k,\Omega_j} \left(\sum_{T \in \Omega_j} |\varphi_h|_{3,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k = 1 \text{ oder } 2, \end{aligned}$$

$$|E''_j(u, \varphi_h)| \leq ch^2 \sum_{i=0}^{I-1} |g|_{1,T_{ij}} |\varphi_h|_{3,T_{ij}} \leq ch^2 |g|_{1,\Omega_j} \left(\sum_{T \in \Omega_j} |\varphi_h|_{3,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Weiter gilt für $x_{i+1} - x_i = \Delta x$

$$\begin{aligned} E''_j(u, \varphi_h) &= \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x} \sum_{i=0}^{I-1} \left(\int_{-1}^1 \frac{1-\eta^2}{8} \hat{g}_i(\eta) - \hat{g}_{i+1}(\eta) d\eta \right) c_{ij} \\ &= \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x} \sum_{i=1}^{I-1} \left(\int_{-1}^1 \frac{1-\eta^2}{8} 2\hat{g}_i(\eta) - \hat{g}_{i+1}(\eta) - \hat{g}_{i-1}(\eta) d\eta \right) (D\varphi_{j+1,j}^i + D\varphi_{j,j+1}^i), \end{aligned} \tag{4.27}$$

denn die Terme $(\hat{g}_0(\eta) - \hat{g}_1(\eta))(D\varphi_{j+1,j}^0 + D\varphi_{j,j+1}^0)$ und $(\hat{g}_{I-1}(\eta) - \hat{g}_I(\eta))(D\varphi_{j+1,j}^I + D\varphi_{j,j+1}^I)$ verschwinden wegen der Randbedingungen von φ_h und \hat{g} . Mit der gleichen Begründung wie oben gilt

$$\int_{-1}^1 (1-\eta^2)(2\hat{g}_i - \hat{g}_{i+1} - \hat{g}_{i-1})d\eta = 0 \quad \forall \hat{g}(\xi, \eta) \in P_1,$$

und deswegen ergibt sich analog die Abschätzung

$$\left| \int_{-1}^1 (1-\eta^2)(2\hat{g}_i - \hat{g}_{i+1} - \hat{g}_{i-1})d\eta \right| \leq ch|g|_{2,T_{ij}}.$$

Für E_j'' erhalten wir dann die behauptete Abschätzung

$$|E_j''(u, \varphi_h)| \leq ch^2 \sum_{i=1}^{I-1} |g|_{2, T_{ij}} |\varphi_h|_{2, T_{ij}} \leq ch^2 |g|_{2, \Omega_j} \left(\sum_{T \in \Omega_j} |\varphi_h|_{3, T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

In folgendem Satz fassen wir alle bisherigen Ergebnisse zusammen.

Satz 4.20. *Ist das Gebiet Ω H^4 -regulär und gilt für die Zerlegung des Gebietes $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ und $y_{j+1} - y_j = \Delta y$, dann gilt für u und $\varphi_h \in V_h$ die Abschätzung*

$$|E_h(u, \varphi_h)| \leq ch^2 |u|_4 \|\nabla^2 \varphi_h\|_h.$$

Beweis. Es gilt $E_h(u, \varphi_h) = E_h^1(u, \varphi_h) + E_h^2(u, \varphi_h)$ und $E_h^1(u, \varphi_h) = \sum_{j=1}^{J-1} E_j(u, \varphi_h)$, analog für $E_h^2(u, \varphi_h)$. Mit den Abschätzungen aus Satz 4.19 erhalten wir

$$\begin{aligned} |E_j(u, \varphi_h)| &\leq |E_j'(u, \varphi_h)| + |E_j''(u, \varphi_h)| \\ &\leq ch^2 |g|_{2, \Omega_j} \left(\sum_{T \in \Omega_j} |\varphi_h|_{2, T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Durch Summation über alle j erhält man eine Abschätzung für $E_h^1(u, \varphi_h)$, indem man wieder für $g = ((1 - \sigma)\partial_2^2 u - \Delta u)$ einsetzt:

$$|E_h^1(u, \varphi_h)| \leq ch^2 |u|_4 \|\nabla^2 \varphi_h\|_h.$$

Analog verfährt man um eine Abschätzung für $E_h^2(u, \varphi_h)$ zu erhalten. Zusammen ergibt das die behauptete Abschätzung

$$|E_h(u, \varphi_h)| \leq ch^2 |u|_4 \|\nabla^2 \varphi_h\|_h. \quad \square$$

Bemerkung 4.5. Die Abschätzung zeigt, dass der Patch-Test für $u \in P_3$ gilt.

Bemerkung 4.6. Die Abschätzung

$$|E_h(u, \varphi_h)| \leq ch^3 |u|_4 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\varphi_h|_{3, T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

für H^4 -reguläre Gebiete Ω ist wegen (4.27) nicht möglich.

Alle Abschätzungen sind bereitgestellt, um zur Fehlerabschätzung zurückzukehren.

Satz 4.21. *Ist das Gebiet Ω H^3 -regulär, dann gelten für die Lösung $u \in H^3(\Omega)$ von (3.11) und die diskrete Lösung $u_h \in V_h$ von (4.11) die Abschätzungen*

$$\begin{aligned}\|\nabla^2(u - u_h)\|_h &\leq ch|u|_3 \\ \|u - u_h\|_1 &\leq ch^2|u|_3.\end{aligned}$$

Unter der zusätzlichen Annahme, dass das Gebiet Ω H^4 -regulär ist, und dass das Gitter gleichförmig ist, d. h. $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ und $y_{j+1} - y_j = \Delta y$ gilt, gilt die Abschätzung

$$\|\nabla^2(u - u_h)\|_h \leq ch^2|u|_4.$$

Beweis. Wir verwenden das Resultat von Satz 4.15:

$$\|\nabla^2(u - u_h)\|_h \leq c \left(\inf_{v \in V_h} \|\nabla^2(u - v)\|_h + \sup_{w \in V_h} \frac{|E_h(u, w)|}{\|\nabla^2 w\|_h} \right). \quad (4.28)$$

Das Infimum lässt sich mit der Hermite-Interpolierenden I_h abschätzen.

$$\inf_{v \in V_h} \|\nabla^2(u - v)\|_h \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u - I_h u|_{2,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq ch|u|_3.$$

Das Supremum haben wir bereits in Satz 4.18 abgeschätzt:

$$\sup_{w \in V_h} \frac{|E_h(u, w)|}{\|\nabla^2 w\|_h} \leq ch|u|_3.$$

Damit ergibt sich die erste behauptete Abschätzung

$$\|\nabla^2(u - u_h)\|_h \leq ch|u|_3.$$

Für das weitere Vorgehen verwenden wir das Resultat aus Satz 4.16

$$\|u - u_h\|_1 \leq c \sup_{z \in H^3(\Omega)} \left\{ \inf_{z_h \in V_h} \frac{|a_h(u - u_h, z - z_h) + E_h(z, u - u_h) - E_h(u, z - z_h)|}{\|z\|_3} \right\},$$

wobei $z \in H^3(\Omega)$ die Lösung des dualen Problems ist. Für den ersten Teil gilt mit der Hermite-Interpolierenden $I_h z \in V_h$ von z die Abschätzung

$$a_h(u - u_h, z - I_h z) \leq c \|\nabla^2(u - u_h)\|_h \|\nabla^2(z - I_h z)\|_h \leq ch^2|u|_3|z|_3.$$

Wir stellen eine Abschätzung bereit, die wir im Folgenden verwenden wollen. Es gilt mit der

Dreiecksungleichung und der inversen Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u_h|_{3,T}^2 &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u_h - I_h u|_{3,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |I_h u|_{3,T}^2 \\ &\leq ch^{-2} \|\nabla^2(u_h - I_h u)\|_h^2 + c|u|_3^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Aufgrund der Eigenschaft der Hermite-Interpolierenden $I_h u$ gilt

$$\|\nabla^2(u_h - I_h u)\|_h \leq \|\nabla^2(u_h - I_h u_h)\|_h + \|\nabla^2(I_h u_h - I_h u)\|_h \leq ch|u|_3.$$

Dies ergibt zusammen mit (4.29)

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u_h|_{3,T}^2 \leq c|u|_3^2.$$

Um die Terme $|E_h(z, u - u_h)|$ und $|E_h(u, z - I_h z)|$ abzuschätzen, verwenden wir Satz 4.18. Danach gilt für alle $z \in H^3(\Omega)$

$$\begin{aligned} |E_h(z, u - u_h)| &= |E_h(z, u_h)| \leq ch^2|z|_3 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u_h|_{3,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq ch^2|z|_3|u|_3, \\ |E_h(u, z - I_h z)| &= |E_h(u, I_h z)| \leq ch^2|u|_3|z|_3. \end{aligned}$$

Mit den Abschätzungen der einzelnen Terme ergibt sich somit insgesamt

$$\|u - u_h\|_1 \leq ch^2|u|_3.$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass das Gebiet Ω H^4 -regulär ist, d. h. $u \in H^4(\Omega)$, und dass das Gitter gleichförmig in dem Sinn $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ und $y_{j+1} - y_j = \Delta y$ ist. Das Infimum und das Supremum (4.28) lassen sich mit dem Resultat aus Satz 4.20 abschätzen:

$$\begin{aligned} \inf_{v \in V_h} \|\nabla^2(u - v)\|_h &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u - I_h u|_{2,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq ch^2|u|_4, \\ \sup_{w \in V_h} \frac{|E_h(u, w)|}{\|\nabla^2 w\|_h} &\leq ch^2|u|_4. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die letzte behauptete Abschätzung

$$\|\nabla^2(u - u_h)\|_h \leq ch^2|u|_4. \quad \square$$

Bemerkung 4.7. Eine Konvergenz in der Norm $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ kann nicht von der Ordnung h^3 sein,

weder im Fall gleichförmiger Gitter noch im allgemeinen Fall. Der Grund dafür ist, dass wir keine Abschätzung der Form

$$|E_h(u, \varphi_h)| \leq ch^3 |u|_4 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\varphi_h|_3^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

für ein H^4 -reguläres Gebiet bekommen, vergleiche Bemerkung 4.6. Die Konvergenz in der L^2 -Norm ergibt sich mit der Poincaréschen Ungleichung aus der Abschätzung in Satz 4.21:

$$\|u - u_h\| \leq ch^2 |u|_3.$$

4.3.4 Vor- und Nachteile

Auf den ersten Blick handelt es sich bei diesem nichtkonformen Verfahren um ein sehr sparsames Verfahren. Die verwendeten Polynomräume sind nicht so groß wie im konformen Fall. Die System-Matrizen werden nicht so groß sein. Die Abschwächung der Stetigkeitsanforderungen wirkt sich somit positiv auf die Größe des Problems aus. Sicher ist zu erwarten, dass das Lösen der diskreten Probleme nicht so aufwändig ist wie im konformen Fall. Die bewiesenen Konvergenzordnungen sind nicht vergleichbar mit den Konvergenzordnungen im konformen Fall. Die Fehler werden auf feineren Gittern nicht so schnell abnehmen, wie das beim konformen Verfahren der Fall sein wird. Es ist somit zu überlegen, ob man nicht durch eine Modifikation die optimalen Konvergenzordnungen bekommen und trotzdem die Sparsamkeit dieses Verfahrens nutzen könnte.

4.4 Interior-Penalty-Verfahren

Wir haben bereits in Abschnitt 4.2 ein konformes Verfahren vorgestellt. Daraufhin haben wir beim nichtkonformen Verfahren in Abschnitt 4.3 mit dem Adini-Element die Anforderungen an die Stetigkeit abgeschwächt. In diesem Kapitel betrachten wir eine Methode, die nur Stetigkeitsanforderungen der Funktion über den Finite-Elemente-Ansatz realisiert. Die Randwerte werden zum einen durch die Knotenfunktionale und zum anderen über die Bilinearform vorgegeben. Die Interior-Penalty-Methode verwendet ein stetiges bikubisches Element. Hier werden nur Punktauswertungen \bullet vorgeschrieben, siehe Abbildung 4.5. Durch Vorgabe des Polynomraums $P(T) = Q_3(T)$ erhalten wir einen unisolventen Finite-Elemente-Ansatz.

Satz 4.22. *Die Vorgabe des Polynomraums $P(T)$ und der oben angegebenen Knotenfunktionale $K(T)$ definieren einen unisolventen Finite-Elemente-Ansatz.*

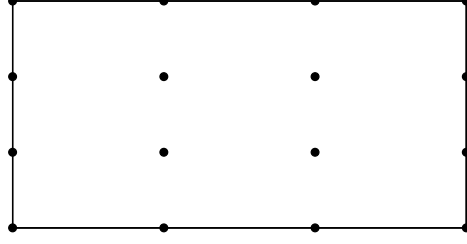


Abbildung 4.5: C^0 -Element

Beweis. Es ist klar, dass gilt $\dim Q_3 = |K(T)|$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Interpolation ist auch klar, dass für alle $p \in Q_3(T)$ gilt $p \equiv 0$ für $\chi(p) = 0 \forall \chi \in K(T)$. \square

Satz 4.23. Für die Interior-Penalty-Methode definieren wir folgenden Finite-Elemente-Ansatzraum

$$V_h := \{ \varphi_h \in L^2(\Omega) \mid \varphi_h|_T \in Q_3(T), \varphi_h \text{ stetig in den Knotenpunkten der } T \in \mathcal{T}_h, \varphi_h = 0 \text{ in Knotenpunkten auf } \partial\Omega_E \cup \partial\Omega_G \}.$$

Die so definierten Ansatzräume liefern stetige Übergänge zwischen den Zellen der Zerlegung.

Beweis. Durch die Vorgabe von vier Funktionswerten auf einer Kante ist ein Polynom dritten Grades eindeutig bestimmt. Damit sind die Übergänge zwischen den Zellen stetig. \square

4.4.1 Beschreibung des Verfahrens

Wie wir schon erwähnt haben, werden wir bei dieser Methode die Anforderungen die Randbedingungen, die nicht im Finite-Elemente-Ansatzraum verankert sind, durch die Bilinearform realisieren. Die hier angegebenen Resultate sind zum Teil entnommen aus (Brenner und Sung 2005). Ausgehend von der variationellen Formulierung für die Plattengleichung leiten wir eine Bilinearform für das Interior-Penalty-Verfahren her. Wir summieren dazu die Terme

$$(\Delta u, \Delta \varphi)_T - (1 - \sigma) \{ (\partial_1^2 u, \partial_2^2 \varphi)_T + (\partial_2^2 u, \partial_1^2 \varphi)_T - 2(\partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_2 \varphi)_T \} + (\partial_n \Delta u - (1 - \sigma) \partial_t^2 \partial_n u, \varphi)_{\partial T} + (\Delta u - (1 - \sigma) \partial_t^2 u, \partial_n \varphi)_{\partial T} = (f, \varphi)_T \quad (4.30)$$

auf jeder Zelle $T \in \mathcal{T}_h$. Bei der Summation treten Sprünge über Kanten der Zerlegung \mathcal{T}_h auf. Wir definieren für eine (offene) Kante $e \in \mathcal{E}_h$ zwischen den Elementen T_+ und T_- :

Definition 4.3. Sprung der Funktion ψ über eine Kante

$$[[\psi]] = \begin{cases} |\psi_{T_+}|_e - \psi_{T_-}|_e & \text{für } e \subset \Omega, \\ |\psi|_e & \text{für } e \subset \partial\Omega \end{cases}$$

Um die Eindeutigkeit zu gewährleisten, verwenden wir in der Definition 4.3 Beträge.

Definition 4.4. Sprung der Normalableitung einer Funktion ψ über eine Kante

$$[[\partial_n \psi]] = \begin{cases} \partial_n \psi_{T_+}|_e - \partial_n \psi_{T_-}|_e & \text{für } e \subset \Omega, \\ -\partial_n \psi|_e & \text{für } e \subset \partial\Omega \end{cases}$$

Für eine Kante am Rand wählen wir n als äußeren Normaleneinheitsvektor. Im Fall einer inneren Kante wählen wir die Normale, die von T_+ nach T_- zeigt. Die Definition ist unabhängig von der Wahl von n und somit eindeutig.

Definition 4.5. Mittelwerte der Funktion ψ auf Kanten

$$\{\!\!\{ \psi \}\!\!\} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\psi_{T_+}|_e + \psi_{T_-}|_e) & \text{für } e \subset \Omega, \\ \psi|_e & \text{für } e \subset \partial\Omega \end{cases} \quad (4.31)$$

Wir erinnern daran, dass mit \mathcal{E}_h die Menge der in \mathcal{T}_h auftretenden (offenen) Kanten bezeichnet wird. Wir unterscheiden zwischen Kanten auf dem Rand und Kanten im Inneren des Gebietes. Mit \mathcal{E}_h° sei die Menge der inneren Kanten der Zerlegung bezeichnet, \mathcal{E}_h^E bezeichne die Kanten auf dem Rand $\partial\Omega_E$.

Bei Summation der einzelnen Terme (4.30) über die Zellen der Zerlegung treten Sprünge auf. Die Terme

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} (\partial_n \Delta u - (1 - \sigma) \partial_t^2 \partial_n u, [[\varphi]])_{\partial T}$$

verschwinden, denn nach Definition des Finite-Elemente-Ansatz-Raums verschwindet der Sprung von $\varphi \in V_h$ über alle Kanten der Zerlegung, da φ stetig ist, und die Randterme verschwinden. Durch Summation von (4.30) über alle Zellen der Zerlegung erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [(\Delta u, \Delta \varphi)_T - (1 - \sigma) \{(\partial_1^2 u, \partial_2^2 \varphi)_T + (\partial_2^2 u, \partial_1^2 \varphi)_T - 2(\partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_2 \varphi)_T\}] \\ & + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} (\Delta u - (1 - \sigma) \partial_t^2 u, [[\partial_n \varphi]])_e = (f, \varphi), \end{aligned} \quad (4.32)$$

für alle $\varphi \in V_h$. Stabilisieren und symmetrisieren wir die Terme in (4.32), ergibt sich unter Beachtung der Randbedingungen

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [(\Delta u, \Delta \varphi)_T - (1 - \sigma)\{(\partial_1^2 u, \partial_2^2 \varphi)_T + (\partial_2^2 u, \partial_1^2 \varphi)_T - 2(\partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_2 \varphi)_T\}] \\ & + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} (\{\Delta u - (1 - \sigma)\partial_t^2 u\}, [\partial_n \varphi])_e + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} (\{\Delta \varphi - (1 - \sigma)\partial_t^2 \varphi\}, [\partial_n u])_e \\ & + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^E} \frac{\eta}{|e|} ([\partial_n u], [\partial_n \varphi])_e, \end{aligned}$$

wobei $|e|$ die Länge einer Kante bezeichnet und η ein Strafparameter ist, der später geeignet gewählt wird. Damit definieren wir eine Bilinearform wie folgt:

Definition 4.6. Für das Interior-Penalty-Verfahren verwenden wir die folgende diskrete Bilinearform a_h gegeben als

$$\begin{aligned} a_h(u, \varphi) & := A_h(u, \varphi) + B_h(u, \varphi) + \eta C_h(u, \varphi), \\ A_h(u, \varphi) & := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [(\Delta u, \Delta \varphi)_T - (1 - \sigma)\{(\partial_1^2 u, \partial_2^2 \varphi)_T + (\partial_2^2 u, \partial_1^2 \varphi)_T - 2(\partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_2 \varphi)_T\}], \\ B_h(u, \varphi) & := \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} (\{\Delta u - (1 - \sigma)\partial_t^2 u\}, [\partial_n \varphi])_e + (\{\Delta \varphi - (1 - \sigma)\partial_t^2 \varphi\}, [\partial_n u])_e, \\ C_h(u, \varphi) & := \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^E} \frac{\eta}{|e|} ([\partial_n u], [\partial_n \varphi])_e. \end{aligned}$$

Das Interior-Penalty-Verfahren lautet somit:

Finde ein $u_h \in V_h$, so dass

$$a_h(u_h, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in V_h. \quad (4.33)$$

Mit Lemma 5 in (Brenner und Sung 2005) kann man in die diskrete Bilinearform die kontinuierliche Lösung u der Plattengleichung (3.11) einsetzen und es gilt $a_h(u, \varphi) = (f, \varphi)$. Für das Interior-Penalty-Verfahren gilt also die Galerkin-Orthogonalität

$$a_h(u - u_h, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Im Folgenden untersuchen wir die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Wir führen dazu folgende Norm ein:

$$\|\varphi\|^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \{|\varphi|_{H^2(T)}^2 + |\varphi|_{H^1(T)}^2\} + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \|\{\Delta \varphi\}\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} |e|^{-1} \|[\partial_n \varphi]\|_{L^2(e)}^2.$$

Dass dies für $|\partial\Omega_E| > 0$ eine Norm ist, sieht man wie folgt: Ist $\|\varphi\| = 0$, so gilt auf jeder Zelle $|\varphi|_{H^1(T)} = 0$, d. h. φ ist auf jeder Zelle konstant. Der Term $|e|^{-1} \|\llbracket \partial_n \varphi \rrbracket\|_{L^2(e)} = 0$ impliziert, dass φ global konstant ist. Ist ein Teil des Randes eingespannt, also $\partial\Omega_E \neq \emptyset$, so gilt $\varphi = 0$ auf ganz Ω . Um die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Problems zu zeigen, weisen wir nach, dass die Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$ koerziv und beschränkt ist.

Satz 4.24. *Die Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$ aus Definition 4.6 ist bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ beschränkt.*

Beweis. Es gilt mit der Hölderschen Ungleichung und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|a_h(u, \varphi)| \leq (1 + \eta) \|u\| \|\varphi\| \quad \forall u, \varphi \in V_h.$$

Somit ist die oben definierte Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ beschränkt. \square

Um die Koerzivität zu zeigen, definieren wir die Seminorm

$$|\varphi|_h^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\varphi|_{H^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} |e|^{-1} \|\llbracket \partial_n \varphi \rrbracket\|_{L^2(e)}^2.$$

Auf dem Finite-Elemente-Raum sind die Norm $\|\varphi\|$ und die Seminorm $|\varphi|_h$ äquivalent.

Lemma 4.25. *Es gibt ein $c > 0$, so dass die Ungleichungskette*

$$|\varphi|_h \leq \|\varphi\| \leq c |\varphi|_h$$

gilt.

Beweis. Die erste Ungleichung ist wegen der Definitionen der Norm bzw. der Seminorm automatisch erfüllt. Mit der Spurabschätzung (4.7) und der inversen Abschätzung (4.2) gilt

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} |e| \|\llbracket \Delta \varphi \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \leq c \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |e| \|\nabla^2 \varphi\|_{H^1(T)}^2 \leq c \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\varphi|_{H^2(T)}^2 \quad \forall \varphi \in V_h. \quad (4.34)$$

Mit der Poincaré-Friedrichsschen Ungleichung für stückweise H^1 -Funktionen (Brenner 2003) gilt

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\varphi|_{H^1(T)}^2 \leq c \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\varphi|_{H^2(T)}^2 + c \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} |e|^{-1} \|\llbracket \partial_n \varphi \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Damit ist auch die zweite Ungleichung gezeigt. \square

Wir können nun die Koerzivität der Bilinearform zeigen.

Satz 4.26. Die Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$ ist bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ koerziv auf dem Finite-Elemente-Raum V_h , wenn der Strafparameter η groß genug gewählt wird. Es gilt für ein $\gamma > 0$

$$a_h(\varphi, \varphi) \geq \gamma \|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Beweis. Zuerst geben wir eine Abschätzung für den Teil $B_h(\cdot, \cdot)$ (vgl. Definition 4.6). Mit der Cauchy-Schwarz- und der Youngschen Ungleichung gilt aufgrund der Randbedingungen von φ für ein beliebiges $\varrho > 0$

$$\begin{aligned} -B_h(\varphi, \varphi) &\leq |B_h(\varphi, \varphi)| \\ &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} 2 \left\| \{\Delta\varphi - (1 - \sigma)\partial_t^2\} \right\|_{L^2(e)}^2 \|\partial_n \varphi\|_{L^2(e)}^2 \\ &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} \left\{ \varrho |e| \left\| \{\Delta\varphi - (1 - \sigma)\partial_t^2\} \right\|_{L^2(e)}^2 + \varrho^{-1} |e|^{-1} \|\partial_n \varphi\|_{L^2(e)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Analog zur Abschätzung (4.34) ergibt sich mit obigen Abschätzungen für den Teil $B_h(\varphi, \varphi)$

$$B_h(\varphi, \varphi) \geq -c\varrho \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\varphi|_{H^2(T)}^2 - \varrho^{-1} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} |e|^{-1} \|\partial_n \varphi\|_{L^2(e)}^2, \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Die Konstante c hängt nur von der Formregularität von \mathcal{T}_h ab. Wie schon in Abschnitt 4.3 gezeigt wurde, können wir den Term $A_h(\cdot, \cdot)$ nach unten abschätzen durch

$$A_h(\varphi, \varphi) \geq (1 - \sigma) \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\varphi|_{H^2(T)}^2.$$

Wählen wir

$$\varrho = \frac{1 - \sigma}{2c} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{1 - \sigma}{2} + \frac{1}{\varrho}, \quad (4.35)$$

so erhalten wir für $a_h(\varphi, \varphi)$

$$\begin{aligned} a_h(\varphi, \varphi) &= A_h(\varphi, \varphi) + B_h(\varphi, \varphi) + \left(\frac{1 - \sigma}{2} + \frac{2c}{1 - \sigma} \right) C_h(\varphi, \varphi) \\ &\geq (1 - \sigma) \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\varphi|_{H^2(T)}^2 - \frac{1 - \sigma}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\varphi|_{H^2(T)}^2 - \frac{2c}{1 - \sigma} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} |e|^{-1} \|\partial_n \varphi\|_{L^2(e)}^2 \\ &\quad + \left(\frac{1 - \sigma}{2} + \frac{2c}{1 - \sigma} \right) \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} |e|^{-1} \|\partial_n \varphi\|_{L^2(e)}^2 \\ &\geq \left(\frac{1 - \sigma}{2} \right) |\varphi|_h^2 \geq \gamma \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Da $\sigma \in [0, 1)$ liegt, ist $\gamma = \frac{1-\sigma}{2c} > 0$. Damit ist die Koerzivität der Bilinearform gezeigt. \square

Wir nehmen im Folgenden an, dass η gemäß (4.35) gewählt wird. Wie bereits bei den anderen Verfahren zeigen wir mit dem Darstellungssatz von Riesz, dass das Interior-Penalty-Verfahren eine eindeutige Lösung besitzt. Dazu zeigen wir, dass (f, \cdot) stetig bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ ist. Es gilt

$$|(f, \varphi)| \leq \|f\| \|\varphi\| \leq c \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Für Funktionen φ aus V_h können wir die verallgemeinerte Poincarésche Ungleichung für φ anwenden. Da V_h ein endlichdimensionaler Raum ist, sind die Normen $\|\nabla\varphi\|$ und $\|\varphi\|$ äquivalent. Daher gelten die Ungleichungen

$$\|\varphi\| \leq c \|\nabla\varphi\| \leq c \|\varphi\|.$$

mit einer von h abhängigen Konstante $c = c(h)$. Zusammen ergibt sich die Stetigkeit

$$|(f, \varphi)| \leq c \|\varphi\|.$$

Satz 4.27. *Das Problem (4.33) hat für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung $u_h \in V_h$, sofern $|\partial\Omega_E| > 0$ gilt und der Strafparameter η groß genug gewählt wurde.*

Beweis. In den Sätzen 4.24 und 4.26 haben wir gezeigt, dass die Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$ beschränkt und koerziv auf dem Finite-Elemente-Raum V_h ist. Aufgrund der Stetigkeit von (f, \cdot) bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ gibt es nach dem Darstellungssatz von Riesz eine eindeutige Lösung des Problems (4.33), sofern gilt $|\partial\Omega_E| > 0$. \square

4.4.2 Fehlerabschätzungen

In diesem Abschnitt zeigen wir Fehlerabschätzungen für die Interior-Penalty-Methode, die wir im vorherigen Abschnitt eingeführt haben. Diese sind teilweise entnommen aus (Brenner und Sung 2005). Zuerst zeigen wir eine Bestapproximationseigenschaft. Sei u die kontinuierliche Lösung der Plattengleichung (3.11) und $u_h \in V_h$ die diskrete Lösung der Interior-Penalty-Methode (4.33). Dann gilt mit Céa's Lemma die Abschätzung

$$\|u - u_h\| \leq c \inf_{\varphi_h \in V_h} \|u - \varphi_h\|. \quad (4.36)$$

Satz 4.28. *Ist das Gebiet Ω H^k -regulär, $k = 3$ oder 4 , gilt für die Lösung u von (3.11) und $u_h \in V_h$, die diskrete Lösung der Interior-Penalty-Methode (4.33) in der Norm $\|\cdot\|$ die folgende Abschätzung*

$$\|u - u_h\| \leq ch^{k-2}|u|_k.$$

Beweis. Nach (4.36) gilt $\|u - u_h\| \leq c \inf_{\varphi_h \in V_h} \|u - \varphi_h\|$. Sei $I_h v \in V_h$ die Kanteninterpolierende von v . Damit gilt

$$\|u - u_h\| \leq c \inf_{\varphi_h \in V_h} \|u - \varphi_h\| \leq \|u - I_h u\|.$$

Wir wollen zeigen, dass gilt $\|u - I_h u\|^2 \leq ch^{2k-4}|u|_k^2$, wobei

$$\begin{aligned} \|u - I_h u\|^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \{|u - I_h u|_{H^2(T)}^2 + |u - I_h u|_{H^1(T)}^2\} \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \|\{\Delta(u - I_h u)\}\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ} |e|^{-1} \|\llbracket \partial_n(u - I_h u) \rrbracket\|_{L^2(e)}^2. \end{aligned}$$

Dazu betrachten wir die ersten Summanden einzeln. Es gilt aufgrund der Interpolationsabschätzung

$$\begin{aligned} |u - I_h u|_{H^2(T)} &\leq ch^{k-2}|u|_{H^k(T)}, \\ |u - I_h u|_{H^1(T)} &\leq ch^{k-1}|u|_{H^k(T)}. \end{aligned}$$

Mit der in 4.5 bewiesenen Spurbeschätzung und der Interpolationsabschätzung gilt für den ersten Teil der Randterme

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \|\{\Delta(u - I_h u)\}\|_{L^2(e)}^2 &\leq ch \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \|\nabla^2(u - I_h u)\|_{L^2(e)}^2 \\ &\leq ch \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h|u - I_h u|_{H^3(T)}^2 + h^{-1}|u - I_h u|_{H^2(T)}^2) \\ &\leq ch^{2k-4} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u|_{H^k(T)}^2 = ch^{2k-4}|u|_k^2. \end{aligned}$$

Für den zweiten Teil der Randterme ergibt sich entsprechend:

$$\begin{aligned}
 \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} |e|^{-1} \|[\partial_n(u - I_h u)]\|_{L^2(e)}^2 &\leq ch^{-1} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} \|\nabla(u - I_h u)\|_{L^2(e)}^2 \\
 &\leq ch^{-1} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h|u - I_h u|_{H^2(T)}^2 + h^{-1}|u - I_h u|_{H^1(T)}^2) \\
 &\leq ch^{2k-4} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u|_{H^k(T)}^2 = ch^{2k-4}|u|_k^2.
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich die behauptete Abschätzung

$$\|u - I_h u\| \leq h^{k-2}|u|_k. \quad (4.37)$$

□

Für den Fehler in der L^2 - und der H^1 -Norm zeigen wir die folgende Abschätzung.

Satz 4.29. *Ist das Gebiet Ω H^k -regulär, $k = 3$ oder 4 , dann gilt für die Lösung u von (3.11) und $u_h \in V_h$, die diskrete Lösung der Interior-Penalty-Methode (4.33), in der L^2 - bzw. in der H^1 -Norm die folgende Abschätzung*

$$\|u - u_h\|_s \leq ch^{2k-s-4}|u|_k, \quad s = 0 \text{ oder } 1.$$

Beweis. Der Beweis verläuft wie im konformen Fall. Da hier die Norm $\|\cdot\|$ zur Abschätzung verwendet wird, führen wir den Beweis aus. Wir verwenden zum Beweis den Nitsche-Trick und erhalten mit dem eindeutig lösbaeren dualen Problem (3.13) für alle $\varphi_h \in V_h$

$$|(g, u - u_h)| = |a_h(u - u_h, z)| = |a_h(u - u_h, z - \varphi_h)| \leq c\|z - \varphi_h\|_2 \|u - u_h\|_2,$$

Es gilt dann für $\varphi_h \in V_h$ aufgrund der Stetigkeit der Bilinearform

$$|(g, u - u_h)| = |a_h(z, u - u_h)| = |a_h(z - \varphi_h, u - u_h)| \leq c\|z - \varphi_h\| \|u - u_h\|,$$

denn wegen der Galerkin-Orthogonalität ist $a_h(\varphi_h, u - u_h) = 0$. Sei nun $\varphi_h \in V_h$ die Bestapproximation in der Norm $\|\cdot\|$. Dann lässt sich die Differenz mit (4.37) abschätzen durch

$$\|z - \varphi_h\| \leq \|z - I_h z\| \leq ch^{k-s-2}\|z\|_{k-s}.$$

Mit der a-priori Abschätzung gilt $\|z - \varphi_h\| \leq ch^{k-s-2}\|g\|_{-s}$. Den Term $\|u - u_h\|$ hatten wir

bereits in Satz 4.28 abgeschätzt. Zusammen ergibt das die Abschätzung

$$|(g, u - u_h)| \leq ch^{2k-s-4} \|g\|_{-s} |u|_k.$$

Es gilt aufgrund der Definition der Normen

$$\|u - u_h\|_s = \sup_{g \in H^{-s}} \frac{|(g, u - u_h)|}{\|g\|_{-s}} \leq ch^{2k-s-4} |u|_k, \quad s = 0 \text{ oder } 1.$$

Damit haben wir die behaupteten Abschätzungen gezeigt. □

Bemerkung 4.8. Für ein H^4 -reguläres Gebiet erhalten wir

$$\begin{aligned} \|u - u_h\| &\leq ch^4 |u|_4, \\ \|u - u_h\|_1 &\leq ch^3 |u|_4 \end{aligned}$$

für den L^2 - und den H^1 -Fehler.

4.4.3 Vor- und Nachteile

Dieses Verfahren verwendet genau wie das konforme Verfahren den Polynomraum Q_3 . Dadurch, dass die Anforderungen an die stetige Differenzierbarkeit im Gegensatz zum konformen Verfahren abgeschwächt sind, könnte man vermuten, dass dieses Verfahren attraktiver ist. Die Konvergenzabschätzungen für die Fehler sind genau die selben, die auch das konforme Verfahren liefert. Die Anordnung der Freiheitsgrade des verwendeten Lagrange- Q_3 -Elements führt jedoch bei Gitterverfeinerung schnell zu großen Matrizen. Diese sind nicht sehr dünn besetzt, denn es müssen nicht nur die Terme für die Beiträge jeder Zelle der Zerlegung berechnet werden, sondern auch die Beiträge, die von jeder Kante geliefert werden. Für eine Zelle sind also fünf mal so viele Matrixeinträge zu berechnen wie bei den vorher besprochenen Verfahren. Das wird sich negativ auf die Rechenzeit auswirken.

4.5 Modifiziertes Interior-Penalty-Verfahren basierend auf dem Adini-Element

Wir haben mit dem konformen Element ein relativ leistungsfähiges Verfahren vorgestellt. Unsere Motivation war es, die Stetigkeitsanforderung abzuschwächen, um kleinere und nicht so dicht besetzte Matrizen zu bekommen. Das Adini-Element lieferte ein nichtkonformes

Verfahren, das diese Bedingungen erfüllt. Was wir dafür hinnehmen mussten, waren die schlechten Konvergenzordnungen im Vergleich zum konformen Verfahren und zur Interior-Penalty-Methode. In diesem Abschnitt geben wir eine mögliche Verbesserung mit dem Adini-Element an. Dazu verwenden wir als Finites Element das in Abschnitt 4.3 beschriebene Adini-Element. Die variationelle Formulierung werden wir dahingehend ändern, dass Randwerte der Funktion nicht mehr über variationelle Formulierung eingebaut werden. Randwerte werden nur noch über die Knotenfunktionale vorgegeben. Wir werden eine abgewandelte Interior-Penalty-Methode vorstellen, die das Adini-Element verwendet. Die Vorgabe der Knotenfunktionale ist in Abbildung 4.2 auf Seite 27 beschrieben. Wir übernehmen den Polynomraum des Adini-Elements

$$P(T) = P_3(T) \oplus \text{span} \{x_1 x_2^3, x_1^3 x_2\}.$$

Im Abschnitt 4.3 haben wir gesehen, dass dieser Ansatz unisolvent ist. Mit dem Finite-Elemente-Ansatzraum

$$V_h := \{\varphi_h \in L^2(\Omega) \mid \varphi_h|_T \in P(T), \varphi_h \text{ und } \nabla \varphi_h \text{ stetig in den Eckpunkten der } T \in \mathcal{T}_h, \\ \varphi_h = \partial_n \varphi_h = 0 \text{ in Eckpunkten auf } \partial\Omega_E, \varphi_h = 0 \text{ in Eckpunkten auf } \partial\Omega_G\}$$

hatten wir einen Ansatz definiert, der nicht V -konform ist. Es gilt aber die Inklusion $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$.

4.5.1 Beschreibung des Verfahrens

Wie bereits erwähnt, werden wir nicht die ursprüngliche Bilinearform vom Verfahren mit dem Adini-Element verwenden. Wir wollen eine abgewandelte Bilinearform der Interior-Penalty-Methode verwenden. Es ist dabei zu beachten, dass die Randbedingungen schon in der Formulierung des Finite-Elemente-Ansatzraumes enthalten sind. Wir verwenden die Bezeichnungen aus Abschnitt 4.4 auf Seite 48.

Definition 4.7. Für das Verfahren definieren wir in Anlehnung an die in Abschnitt 4.4

hergeleitete diskrete Bilinearform.

$$\begin{aligned}
 a_h(u, \varphi) &:= A_h(u, \varphi) + B_h(u, \varphi) + \eta C_h(u, \varphi), \\
 A_h(u, \varphi) &:= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[(\Delta u, \Delta \varphi)_T - (1 - \sigma) \{ (\partial_1^2 u, \partial_2^2 \varphi)_T + (\partial_2^2 u, \partial_1^2 \varphi)_T - 2(\partial_1 \partial_2 u, \partial_1 \partial_2 \varphi)_T \} \right], \\
 B_h(u, \varphi) &:= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} (\{ \Delta u - (1 - \sigma) \partial_t^2 u \}, \llbracket \partial_n \varphi \rrbracket)_e + (\{ \Delta \varphi - (1 - \sigma) \partial_t^2 \varphi \}, \llbracket \partial_n u \rrbracket)_e, \\
 C_h(u, \varphi) &:= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} \frac{\eta}{|e|} (\llbracket \partial_n u \rrbracket, \llbracket \partial_n \varphi \rrbracket)_e.
 \end{aligned}$$

Das modifizierte Verfahren auf dem Adini-Element lautet somit:

Finde ein $u_h \in V_h$, so dass

$$a_h(u_h, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in V_h. \quad (4.38)$$

Wie schon beim Interior-Penalty-Verfahren gilt für das modifizierte Interior-Penalty-Verfahren die Galerkin-Orthogonalität

$$a_h(u - u_h, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in V_h.$$

Wir haben bereits in den Sätzen 4.24 und 4.26 die Beschränktheit und die Koerzivität der Bilinearform für genügend großen Strafparameter η gezeigt. Die Beschränktheit und die Koerzivität für oben definierte Bilinearform folgen analog. Damit hat das oben definierte Verfahren nach dem Darstellungssatz von Riesz eine eindeutige Lösung für $f \in L^2(\Omega)$ und $|\partial\Omega_E| > 0$.

4.5.2 Fehlerabschätzungen

Die Resultate des Interior-Penalty-Verfahrens können wir auf diesen Fall übertragen. Wir erhalten folgende Fehlerabschätzungen.

Satz 4.30. *Ist das Gebiet Ω H^k -regulär $k = 3$ oder 4 , gilt für die Lösung u von 3.11 und $u_h \in V_h$, die diskrete Lösung der modifizierten Interior-Penalty-Methode auf dem Adini-Element (4.38) die folgenden Abschätzungen*

$$\begin{aligned}
 \|u - u_h\| &\leq ch^{k-2}|u|_k, \\
 \|u - u_h\|_s &\leq ch^{2k-s-4}|u|_k, \quad s = 0 \text{ oder } 1.
 \end{aligned}$$

Beweis. Die Aussagen werden analog zu denen in Abschnitt 4.4 bewiesen. □

Bemerkung 4.9. Für ein H^4 -reguläres Gebiet erhalten wir

$$\begin{aligned}\|u - u_h\| &\leq ch^4|u|_4, \\ \|u - u_h\|_1 &\leq ch^3|u|_4\end{aligned}$$

für den L^2 - und den H^1 -Fehler.

Die erhoffte Verbesserung zum ursprünglichen Verfahren mit dem Adini-Element in den Konvergenzordnungen ist somit erreicht.

4.5.3 Vor- und Nachteile

Durch die Modifikation der Bilinearform des schon bestehenden nichtkonformen Verfahrens auf dem Adini-Element werden die Konvergenzordnungen in der L^2 - und der H^1 -Norm verbessert. Somit ist es gelungen die Methode mit dem Adini-Element so zu verändern, dass die Konvergenzordnungen genauso gut sind wie im Fall des konformen Elements bzw. im Fall des Interior-Penalty-Verfahrens. Dadurch, dass als Finites Element das Adini-Element verwendet wird, sind bei Gitterverfeinerung die entstehenden Matrizen nicht so groß wie beim Interior-Penalty-Verfahren. Das liegt daran, dass beim Adini-Element ausschließlich Freiheitsgrade in den Eckpunkten der Zelle verwendet werden und nicht, wie beim Interior-Penalty-Verfahren, Auswertungen auf den Kanten und im Innern der Zelle.

4.6 Finite Elemente auf nichtkartesischen Zellen

Alle in diesem Kapitel beschriebenen Verfahren beruhen auf achsenparallelen Zellen. Damit sind mögliche Gebiete sehr eingeschränkt. Wir haben bisher keine Aussagen darüber getroffen, wie die verwendeten Finiten Elemente auf allgemeinen Gittern aussehen. Ob es überhaupt möglich ist die beschriebenen Verfahren auf allgemeinen Gebieten zu verwenden, werden wir im Folgenden skizzieren.

Für das konforme bikubische Plattenelement ist eine Transformation vom Einheitsquadrat auf ein Rechteckelement, dessen Seiten parallel zur x_1 - und x_2 -Achse liegen, möglich. In (Schwarz 1984) wird beschrieben, dass die partiellen Ableitungen, insbesondere die gemischte zweite partielle Ableitung, durch konstante Faktoren, die von der Länge des Elements bestimmt sind, transformiert werden. Bei einer Abbildung auf ein Parallelogramm ist eine Transformation nicht mehr so einfach möglich. Um die gemischte zweite Ableitung zu transformieren, werden Linearkombinationen aller zweiten Ableitungen benötigt. Diese werden aber nicht als

Knotenvariablen vorgegeben. Daher ist ein konformer bikubischer Ansatz auf Rechtecke und Parallelogramme beschränkt.

Für das Adini-Element haben wir bereits bei der Durchführung der Fehlerabschätzungen gesehen, dass eine Transformation auf Rechtecke, deren Seiten parallel zu den Achsen sind, möglich ist. Es ist nötig die ersten partiellen Ableitungen zu transformieren. Für allgemeine Vierecke ist in (Schwarz 1984) gezeigt wie diese Transformation durchgeführt wird. Eine solche Transformation erfordert einen erheblichen Rechenaufwand. Für diese Fälle sind nur noch die allgemein gezeigten Fehlerabschätzungen gültig.

Das für das Interior-Penalty-Verfahren verwendete Lagrange-Element kann mit Hilfe einer affinen Abbildung auf Parallelogramme transformiert werden. Verwendet man eine bilineare Transformation, kann man das Referenzelement auf allgemeine Vierecke transformieren. Dies kann in (Braess 1997) nachgelesen werden. Für allgemeine Gitter ist die in dieser Arbeit gezeigte Fehleranalyse gültig.

Damit ist das Interior-Penalty-Verfahren die einzige in dieser Arbeit vorgestellte Methode, für die auf allgemeinen Gittern die optimale Konvergenzordnung gilt. Das nichtkonforme Verfahren mit dem Adini-Element ist auf allgemeine Gitter transformierbar. Die Konvergenzordnungen sind nicht optimal.

5 Numerische Analyse der vorgestellten Verfahren

In diesem Kapitel werden wir die vorgestellten Verfahren numerisch untersuchen und analysieren. Alle aufgeführten Beispiele passen in den Kontext von Kapitel 3. Wir geben eine ausführliche Konvergenzanalyse aller vorgestellten Verfahren auf verschiedenen Gebieten mit unterschiedlichen Randbelegungen. Wir vergleichen die Verfahren anhand der Rechenzeit, die nötig ist, um eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen, bzw. in Hinblick auf die Anzahl der verwendeten Freiheitsgrade, die nötig sind, um eine entsprechende Genauigkeit zu erzielen.

5.1 Bestimmung eines geeigneten Strafparameters für das Interior-Penalty-Verfahren

Um mit dem Interior-Penalty-Verfahren eine eindeutige Lösung zu bekommen, muss man den Strafparameter η geeignet wählen, vgl. (4.35). Wie groß der Parameter in der Praxis sein wird, werden wir im Folgenden analysieren. Dazu führen wir Testrechnungen mit verschiedenen Parametern durch. Wir vergleichen die Anzahl der benötigten Iterationsschritte des cg-Verfahrens, um die linearen Gleichungssysteme zu lösen. Von Interesse ist auch das Verhalten der Fehler bei unterschiedlichen Strafparametern. Hierzu ist das Verhalten in Abhängigkeit der Anzahl der cg-Iterationsschritte in Abbildung 5.1 dargestellt. Es wurde nur der L^2 -Fehler betrachtet. Die Fehler in der H^1 - bzw. H^2 -Seminorm verhalten sich entsprechend. In Abbildung 5.2 wird die Anzahl der Iterationsschritte bei unterschiedlichem Strafparameter verdeutlicht. Der Übersichtlichkeit halber wurden nur die Berechnungen dargestellt, bei denen der Strafparameter für die Konvergenz des cg-Verfahrens groß genug gewählt war. Zu große Parameter führen zu größeren Fehlern in der Lösung und dazu, dass das cg-Verfahren nicht konvergiert. Daher wurden zu große Parameter nicht in den Abbildungen dargestellt.

Die Testrechnungen zeigen, dass als optimaler Strafparameter $\eta = 3,5$ gewählt werden sollte. Für diesen Wert konvergiert das cg-Verfahren mit den wenigsten Schritten und die Fehler in der Lösung sind kleiner als bei den anderen Parametern. Daher verwenden wir für die

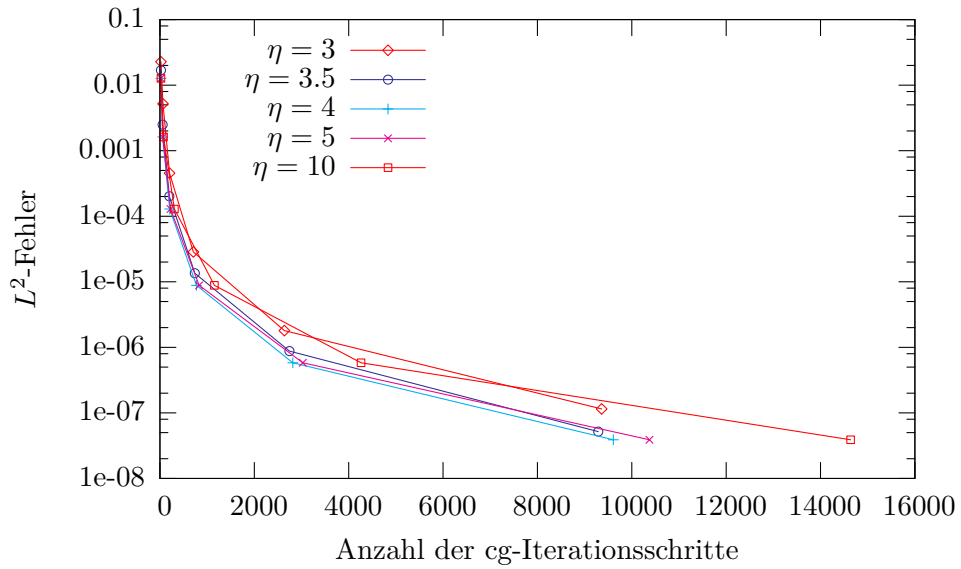


Abbildung 5.1: Der L^2 -Fehler bei unterschiedlichen Strafparametern

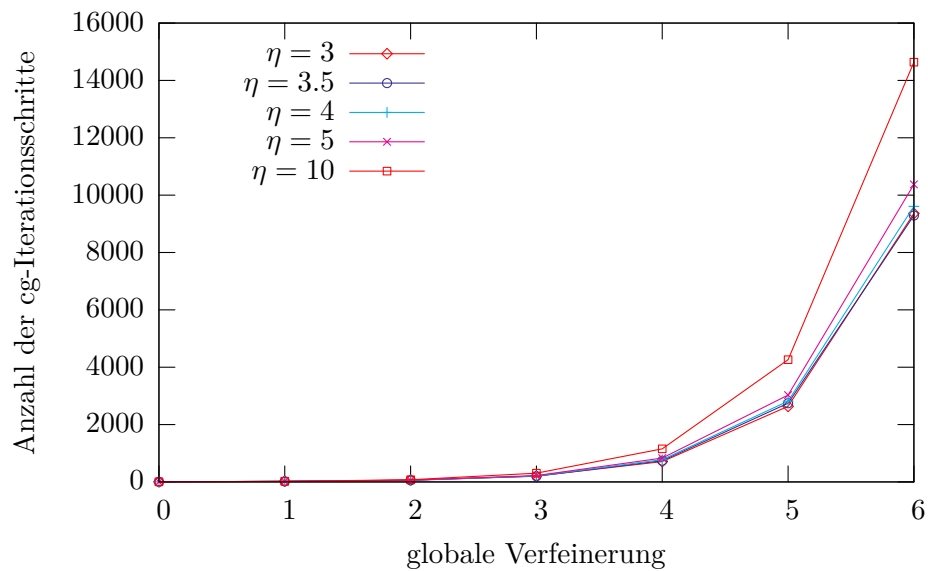


Abbildung 5.2: Anzahl der Iterationsschritte bei unterschiedlichen Strafparametern

folgenden Rechnungen den Strafparameter $\eta = 3,5$ für das Interior-Penalty-Verfahren und das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element.

5.2 Konvergenzanalyse

In diesem Abschnitt analysieren wir die Verfahren an verschiedenen Modellproblemen. Zur Berechnung verwenden wir Gebiete, die sich aus Rechtecken zusammensetzen lassen. Wir betrachten dabei verschiedene Konfigurationen in den Randbedingungen. Wir setzen die Querkontraktionszahl für die Berechnungen auf $\sigma = 0$. Verwendet werden wir als Gebiete ein Einheitsquadrat $\Omega = (-1, 1)^2$, ein L-Gebiet $\Omega = (-1, 1)^2 \setminus [0, 1]^2$ und ein Schlitzgebiet $\Omega = (-1, 1)^2 \setminus \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, x_2 \in [-1, 0]\}$. Die verschiedenen Randbedingungen werden in Abbildung 5.3 dargestellt. Zuerst vergleichen wir die implementierten Verfahren anhand

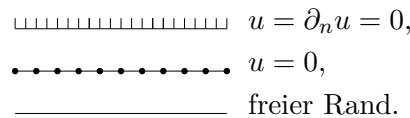


Abbildung 5.3: Darstellung der verschiedenen Randbedingungen

einiger Beispiele, bei denen die analytische Lösung bekannt ist. Später stellen wir Beispiele vor, bei denen wir die analytische Lösung nicht kennen. Dann verwenden wir auf feineren Gittern berechnete Referenzlösungen. Außerdem betrachten wir Randbelegungen, die zu Singularitäten in der Lösung führen. Uns interessiert dabei, wie sich diese in den verschiedenen Verfahren widerspiegeln und welche Auswirkungen sie haben. Zur Analyse der Verfahren berechnen wir auf global verfeinerten Gittern die L^2 -, H^1 - und H^2 - Fehler. Die Referenzlösung ist auf einem Gitter berechnet, das zweimal feiner ist als die feinste betrachtete Lösung. Zuerst vergleichen wir die beschriebenen Verfahren auf dem Einheitsquadrat. Dabei betrachten wir Beispiele mit unterschiedlichen Randbelegungen. Die Ergebnisse sind in Tabellen dargestellt. Darin sind die Fehler und Konvergenzordnungen bei Gitterverfeinerung aufgetragen. Die Abkürzung #dofs steht für die Anzahl der Freiheitsgrade (degrees of freedom). Die letzte Zeile in jeder Tabelle stellt die in dem jeweiligen Fall erwartete Konvergenzordnung dar. In den Fällen, in denen die analytische Lösung bekannt ist, bekommen wir die optimalen Konvergenzordnungen, die wir in den Fehlerabschätzungen gezeigt haben. Für nicht reguläre Lösungen bekommen wir für die Fehler Abschätzungen, die im Wesentlichen vom Interpolationsfehler und von der Regularität der Lösung abhängen: $\|u - u_h\|_s \leq ch^{2k-4}|u|_k$ und $\|u - u_h\|_2 \leq h^{k-2}|u|_k$, $s = 0$ oder 1 , für ein H^k -reguläres Gebiet Ω .

5.2.1 Einheitsquadrat

In diesem Abschnitt betrachten wir das Verhalten der beschriebenen Verfahren auf dem Einheitsquadrat. Wir geben die Regularität der Lösungen und die erwartete Konvergenzordnung für jedes Beispiel an.

Die eingespannte Platte

Wir haben bereits gesehen, dass eine eingespannte Platte durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f && \text{in } \Omega, \\ u = \partial_n u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.1}$$

beschrieben wird. In Abbildung 5.4 wird diese Situation verdeutlicht. Die Aufgabe (5.1) wollen

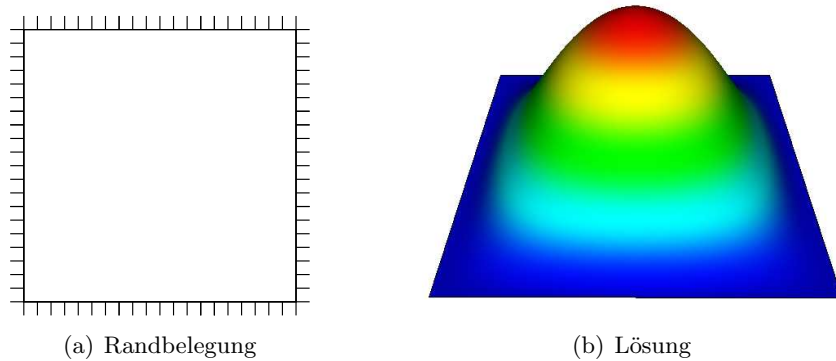


Abbildung 5.4: rundherum eingespannte Platte

wir auf $\Omega = (-1, 1)^2$ mit rechter Seite

$$f(x_1, x_2) = 24(x_1^2 - 1)^2 + 24(x_2^2 - 1)^2 + 2 \left((12x_1^2 - 4)(12x_2^2 - 4) \right)$$

lösen. Durch Nachrechnen erschließt sich, dass die Funktion

$$u(x_1, x_2) = (x_1^2 - 1)^2 (x_2^2 - 1)^2$$

auf Ω die Differentialgleichung und auf $\partial\Omega$ die geforderten Randdaten erfüllt. Die Konvergenzanalyse ist in den Tabellen 5.1 bis 5.4 dargestellt. Die Tabellen 5.1 bis 5.3 verdeutlichen, dass alle Verfahren von der bewiesenen Ordnung konvergieren. Wie wir schon bei der theoretischen Analyse gesehen haben, konvergiert das Verfahren mit dem nichtkonformen Adini-Element

nicht so gut wie die beiden anderen vorgestellten Verfahren. Dieses Problem wollten wir lösen, indem wir das Interior-Penalty-Verfahren auf dem Adini-Element rechnen. Die Konvergenzordnungen sind in der Tabelle 5.4 angegeben. Diese Tabelle zeigt, dass die Konvergenzordnungen durch die Modifikation tatsächlich verbessert werden konnte.

Tabelle 5.1: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L_2(\Omega)}$	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$
16	8.01e-01	-	2.13e+00
36	6.71e-02	3.58	2.73e-01
100	4.15e-03	4.01	3.19e-02
324	2.59e-04	4.00	3.91e-03
1156	1.62e-05	4.00	4.87e-04
erwartet	-	4.00	-

Tabelle 5.2: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L_2(\Omega)}$	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$
12	8.01e-01	-	2.13e+00
27	5.25e-02	3.93	3.06e-01
75	6.09e-02	-0.21	1.84e-01
243	1.87e-02	1.71	5.14e-02
867	4.88e-03	1.93	1.31e-02
erwartet	-	2.00	-

Die gelenkig gelagerte Platte

Wieder betrachten wir ein Beispiel auf dem Einheitsquadrat, bei dem wir die analytische Lösung kennen. Diesmal geben wir andere Randbedingungen vor. Es ist die Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f && \text{in } \Omega, \\ u = M(u) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.2}$$

Tabelle 5.3: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L_2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
16	7.60e-01	-	2.05e+00	-	7.23e+00	-
49	6.36e-02	3.58	2.62e-01	2.97	1.74e+00	2.06
169	3.96e-03	4.01	3.07e-02	3.09	4.10e-01	2.08
625	2.47e-04	4.00	3.77e-03	3.02	1.01e-01	2.02
2401	1.54e-05	4.00	4.70e-04	3.01	2.52e-02	2.00
erwartet	-	4.00	-	3.00	-	2.00

Tabelle 5.4: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L_2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
27	1.73e-02	-	4.14e-02	-	1.58e-01	-
75	5.49e-03	1.66	1.35e-02	1.62	8.90e-02	0.83
243	5.48e-03	0.00	1.40e-02	-0.05	6.76e-02	0.40
867	1.04e-03	2.40	2.51e-03	2.48	1.93e-02	1.81
3267	8.16e-05	3.67	2.01e-04	3.65	3.85e-03	2.32
erwartet	-	4.00	-	3.00	-	2.00

auf $\Omega = (-1, 1)^2$ mit rechter Seite

$$f(x_1, x_2) = 2 \left(\frac{1}{12}(x_1^4 + x_2^4) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) + \frac{5}{6} \right)$$

zu lösen. Man rechnet nach, dass die Funktion

$$u(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{12}x_1^4 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{5}{12} \right) \left(\frac{1}{12}x_2^4 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{5}{12} \right)$$

auf Ω die vorgegebene Differentialgleichung und auf $\partial\Omega$ die Randdaten erfüllt. Die Konfiguration der Randdaten ist dargestellt in Abbildung 5.5. Die Tabellen 5.5 bis 5.7 beinhalten

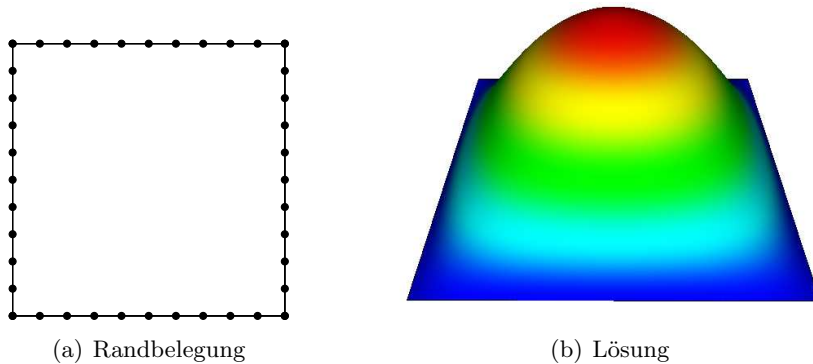


Abbildung 5.5: rundherum gelenkig gelagerte Platte

die Konvergenzordnungen für die in diesem Unterabschnitt berechneten Lösungen. Wieder sehen wir das schon im vorigen Beispiel auftretende Phänomen. Auch bei dieser Konfiguration schneidet das Adini-Element im Vergleich nicht gut ab. Die Modifikation des Verfahrens mit dem Adini-Element liefert verbesserte Resultate. Dies wird in Tabelle 5.8 dargestellt.

Tabelle 5.5: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
36	6.38e-03	-	1.74e-02	-	8.92e-02	-
100	8.77e-04	2.86	4.39e-03	1.99	3.26e-02	1.45
324	8.71e-05	3.33	7.32e-04	2.59	9.97e-03	1.71
1156	6.24e-06	3.80	1.01e-04	2.86	2.66e-03	1.91
4356	4.05e-07	3.94	1.30e-05	2.96	6.76e-04	1.97
erwartet	-	4.00	-	3.00	-	2.00

Tabelle 5.6: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
27	6.66e-02	-	1.48e-01	-	3.30e-01	-
75	8.55e-03	2.96	2.54e-02	2.54	5.50e-01	-0.74
243	3.09e-03	1.47	7.26e-03	1.81	1.06e-01	2.37
867	8.23e-04	1.91	1.86e-03	1.97	1.97e-02	2.43
3267	1.99e-04	2.04	4.46e-04	2.06	3.60e-03	2.45
12675	4.01e-05	2.32	8.94e-05	2.32	5.99e-04	2.59
erwartet	-	2.00	-	2.00	-	2.00

Tabelle 5.7: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
49	6.38e-03	-	1.74e-02	-	8.92e-02	-
169	8.65e-04	2.88	4.34e-03	2.01	3.26e-02	1.45
625	8.61e-05	3.33	7.22e-04	2.59	9.97e-03	1.71
2401	6.11e-06	3.82	9.89e-05	2.87	2.66e-03	1.91
9409	3.95e-07	3.95	1.27e-05	2.96	6.77e-04	1.97
erwartet	-	4.00	-	3.00	-	2.00

Tabelle 5.8: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
27	6.66e-02	-	1.48e-01	-	3.30e-01	-
75	3.74e-02	0.83	8.48e-02	0.80	2.62e-01	0.33
243	8.14e-03	2.20	1.83e-02	2.21	9.68e-02	1.44
867	6.42e-04	3.66	1.49e-03	3.62	1.91e-02	2.34
3267	4.16e-05	3.95	1.08e-04	3.79	3.46e-03	2.47
12675	2.46e-06	4.08	7.72e-06	3.80	5.64e-04	2.61
erwartet	-	4.00	-	3.00	-	2.00

Wechselnde Randbedingungen

In diesem Abschnitt betrachten wir das Plattenproblem auf dem Einheitsquadrat mit wechselnden Randbedingungen. Folgende Gleichung sei zu lösen:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f && \text{in } \Omega, \\ u = \partial_n u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_E, \\ u = M(u) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_S, \\ M(u) = N(u) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_F. \end{aligned} \tag{5.3}$$

1. Beispiel Die Gleichung (5.3) soll auf $\Omega = (-1, 1)^2$ mit rechter Seite $f(x_1, x_2) \equiv 6$ gelöst werden. Die Randstücke $\partial\Omega_S$ und $\partial\Omega_F$ sind durch

$$\begin{aligned} \partial\Omega_S &= \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega \mid x_2 = -1 \text{ oder } x_2 = 1\}, \\ \partial\Omega_F &= \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega \mid x_1 = -1 \text{ oder } x_1 = 1\}, \end{aligned}$$

gegeben. Durch Nachrechnen verifiziert man, dass obige Aufgabe durch

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_2^4 - \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{5}{4}$$

gelöst wird. Die Belegung der Randbedingungen und die Darstellung der Lösung kann man Abbildung 5.6 entnehmen. Zum Vergleich geben wir wieder Tabellen mit den Konver-

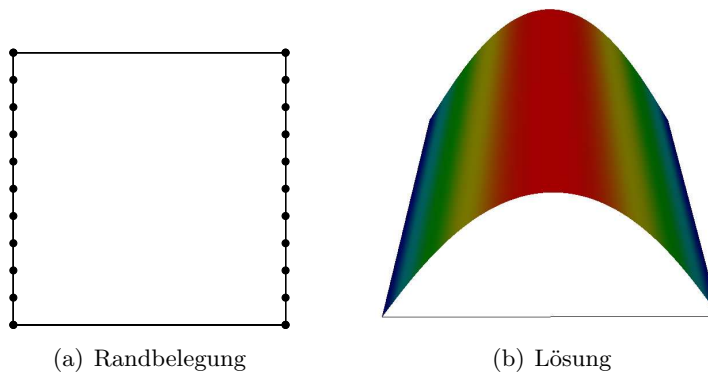


Abbildung 5.6: erstes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (G/F) auf dem Einheitsquadrat

genzordnungen an. Die folgenden Tabellen 5.9 bis 5.12 zeigen die Konvergenzordnungen für das erste Beispiel. Auch im ersten Beispiel mit wechselnden Randbedingungen liefert das modifizierte Verfahren auf dem Adini-Element eine Verbesserung der Konvergenz-

ordnungen.

Tabelle 5.9: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L_2(\Omega)}$	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$
16	3.16e-01	-	6.36e-01
36	1.98e-02	4.00	7.18e-02
100	1.24e-03	4.00	8.71e-03
324	7.73e-05	4.00	1.08e-03
1156	4.83e-06	4.00	1.35e-04
erwartet	-	4.00	-

Tabelle 5.10: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L_2(\Omega)}$	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$
12	3.16e-01	-	6.36e-01
27	6.64e-02	2.25	2.00e-01
75	1.98e-02	1.75	5.15e-02
243	5.12e-03	1.95	1.30e-02
867	1.29e-03	1.99	3.25e-03
erwartet	-	2.00	-

2. Beispiel Wieder ist obige Aufgabe (5.3) auf $\Omega = (-1, 1)^2$ zu lösen mit rechter Seite $f(x_1, x_2) \equiv 6$. Die Randstücke $\partial\Omega_E$, $\partial\Omega_G$ und $\partial\Omega_F$ sind durch

$$\begin{aligned} \partial\Omega_E &= \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega \mid x_2 = -1\}, \\ \partial\Omega_G &= \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega \mid x_2 = 1\}, \\ \partial\Omega_F &= \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega \mid x_1 = -1 \text{ oder } x_1 = 1\}, \end{aligned}$$

gegeben. Die folgende Funktion löst die obige Randwertaufgabe, was man durch Nachrechnen verifiziert.

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4} \left(2 + x_2 - 3x_2^2 - x_2^3 + x_2^4 \right)$$

Die Belegung des Randes wie auch der Plot der berechneten Lösung ist in Abbildung 5.7 dargestellt. Die Konvergenzordnungen für das zweite Beispiel werden in den folgenden Tabellen 5.13 bis 5.15 dargestellt. Wiederum ist zu sehen, dass die Konvergenzordnungen des nichtkonformen Verfahrens 5.14 durch die Modifikation 5.16 verbessert wurden.

Tabelle 5.11: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
16	8.44e-02	-	3.49e-01	-	1.95e+00	-
49	1.01e-02	3.06	6.06e-02	2.53	4.81e-01	2.02
169	7.15e-04	3.82	8.14e-03	2.90	1.17e-01	2.04
625	4.61e-05	3.95	1.04e-03	2.97	2.87e-02	2.03
2401	2.91e-06	3.99	1.30e-04	2.99	7.09e-03	2.02
erwartet	-	4.00	-	3.00	-	2.00

Tabelle 5.12: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
27	5.31e-02	-	9.20e-02	-	2.98e-01	-
75	3.29e-03	4.01	1.15e-02	3.00	7.41e-02	2.01
243	2.16e-04	3.93	1.46e-03	2.97	1.86e-02	2.00
867	1.39e-05	3.96	1.81e-04	3.01	4.66e-03	2.00
3267	8.72e-07	3.99	2.25e-05	3.01	1.16e-03	2.00
erwartet	-	4.00	-	3.00	-	2.00

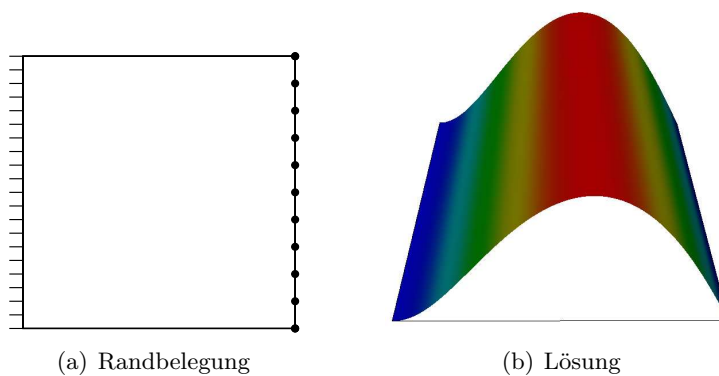
**Abbildung 5.7:** zweites Beispiel für wechselnde Randbedingungen (E/F), (G/F) auf dem Einheitsquadrat

Tabelle 5.13: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F), (G/F) auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L_2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
16	3.16e-01	-	6.36e-01	-	1.79e+00	-
36	1.98e-02	4.00	7.18e-02	3.15	4.47e-01	2.00
100	1.24e-03	4.00	8.71e-03	3.04	1.12e-01	2.00
324	7.73e-05	4.00	1.08e-03	3.01	2.80e-02	2.00
1156	4.83e-06	4.00	1.35e-04	3.00	6.99e-03	2.00
erwartet	-	4.00	-	3.00	-	2.00

Tabelle 5.14: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F), (G/F) auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L_2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
12	3.16e-01	-	6.36e-01	-	1.79e+00	-
27	5.05e-02	2.65	1.71e-01	1.90	6.58e-01	1.44
75	1.36e-02	1.89	3.82e-02	2.16	1.67e-01	1.98
243	3.46e-03	1.97	9.29e-03	2.04	4.19e-02	2.00
867	8.71e-04	1.99	2.31e-03	2.01	1.05e-02	2.00
erwartet	-	2.00	-	2.00	-	2.00

Tabelle 5.15: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F), (G/F) auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L_2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
16	1.86e-01	-	5.39e-01	-	2.09e+00	-
49	1.36e-02	3.77	6.80e-02	2.99	4.93e-01	2.08
169	8.83e-04	3.94	8.40e-03	3.02	1.18e-01	2.06
625	5.59e-05	3.98	1.04e-03	3.01	2.88e-02	2.04
2401	3.51e-06	3.99	1.30e-04	3.00	7.09e-03	2.02
erwartet	-	4.00	-	3.00	-	2.00

Tabelle 5.16: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F), (G/F) auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
27	5.31e-02	-	9.20e-02	-	2.98e-01	-
75	3.31e-03	4.00	1.15e-02	3.00	7.43e-02	2.01
243	2.09e-04	3.99	1.44e-03	2.99	1.86e-02	2.00
867	1.32e-05	3.98	1.80e-04	3.00	4.66e-03	2.00
3267	8.26e-07	4.00	2.25e-05	3.00	1.16e-03	2.00
erwartet	-	4.00	-	3.00	-	2.00

3. Beispiel Wie in den vorigen Beispielen lösen wir die Gleichung (5.3) auf $\Omega = (-1, 1)^2$, wobei die rechte Seite gegeben ist durch $f(x_1, x_2) \equiv 24$. Die Randstücke $\partial\Omega_E$ und $\partial\Omega_F$ sind durch

$$\partial\Omega_E = \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega \mid x_2 = -1 \text{ oder } x_2 = 1\},$$

$$\partial\Omega_F = \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega \mid x_1 = -1 \text{ oder } x_1 = 1\}$$

definiert. Dies wird in Abbildung 5.8 dargestellt. Die Abbildung zeigt auch die zu dieser Randbelegung berechnete Lösung. Diese Lösung der obigen Aufgabe ist gegeben durch

$$u(x_1, x_2) = (x_2^2 - 1)^2.$$

Bei den Berechnungen ergeben sich die Konvergenzordnungen, die in den Tabellen 5.17

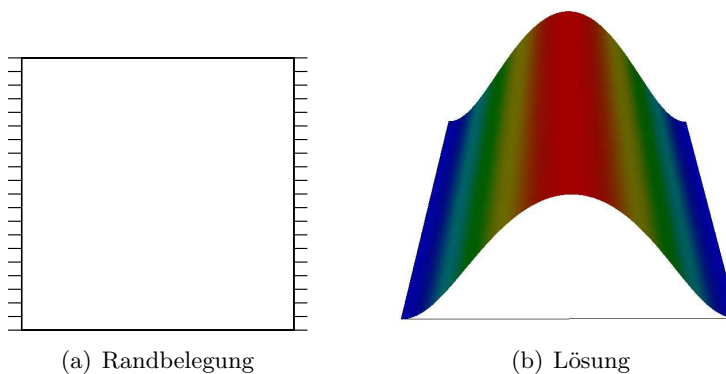


Abbildung 5.8: drittes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (E/F) auf dem Einheitsquadrat

bis 5.20 angegeben sind. Auch hier ist eine Verbesserung der Konvergenzordnungen des modifizierten Verfahrens mit dem Adini-Element gegenüber dem ursprünglichen nichtkonformen Verfahren zu sehen.

Tabelle 5.17: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L_2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
16	1.27e+00	-	2.55e+00	-	7.16e+00	-
36	7.91e-02	4.00	2.87e-01	3.15	1.79e+00	2.00
100	4.94e-03	4.00	3.49e-02	3.04	4.47e-01	2.00
324	3.09e-04	4.00	4.32e-03	3.01	1.12e-01	2.00
1156	1.93e-05	4.00	5.39e-04	3.00	2.80e-02	2.00
erwartet	-	4.00	-	3.00	-	2.00

Tabelle 5.18: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L_2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
12	1.27e+00	-	2.55e+00	-	7.16e+00	-
27	1.58e-01	3.00	6.09e-01	2.06	2.58e+00	1.47
75	3.65e-02	2.11	1.16e-01	2.39	6.41e-01	2.01
243	9.13e-03	2.00	2.66e-02	2.12	1.59e-01	2.01
867	2.29e-03	2.00	6.48e-03	2.04	3.97e-02	2.00
erwartet	-	2.00	-	2.00	-	2.00

Damit haben wir die beschriebenen Verfahren bei verschiedenen Randbelegungen auf dem Einheitsquadrat verglichen. In allen Fällen haben die Verfahren die erwarteten Konvergenzordnungen geliefert.

5.2.2 L-Gebiet

In diesem Abschnitt werden wir die Plattengleichung auf einem L-Gebiet lösen. Die Lösung ist aufgrund der Eckensingularitäten nicht mehr so regulär wie im Fall des Einheitsquadrats. Auch auf dem L-Gebiet vergleichen wir die Verfahren bei unterschiedlichen Randbelegungen.

Tabelle 5.19: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
16	1.08e+00	-	2.84e+00	-	8.81e+00	-
49	6.60e-02	4.03	2.97e-01	3.26	2.02e+00	2.12
169	4.16e-03	3.99	3.45e-02	3.10	4.76e-01	2.09
625	2.61e-04	3.99	4.21e-03	3.04	1.15e-01	2.05
2401	1.63e-05	4.00	5.22e-04	3.01	2.84e-02	2.02
erwartet	-	4.00	-	3.00	-	2.00

Tabelle 5.20: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Einheitsquadrat

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
27	5.31e-02	-	9.20e-02	-	2.98e-01	-
75	3.32e-03	4.00	1.15e-02	3.00	7.45e-02	2.00
243	2.08e-04	4.00	1.44e-03	3.00	1.86e-02	2.00
867	1.30e-05	4.00	1.80e-04	3.00	4.66e-03	2.00
3267	8.08e-07	4.00	2.25e-05	3.00	1.16e-03	2.00
erwartet	-	4.00	-	3.00	-	2.00

Die eingespannte Platte

Wie bei der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat lösen wir die Gleichung (5.1) auf

$$\Omega = (-1, 1)^2 \setminus [0, 1]^2.$$

Die Randbelegung wird in Abbildung 5.9 verdeutlicht. Diese Abbildung zeigt auch die berechnete Lösung. In diesen Beispielen werden wir die numerische Konvergenzanalyse mit einer auf einem feinen Gitter gerechneten Referenzlösung durchführen. Die feinste berechnete Lösung wird mit einer zweimal feineren Lösung verglichen. Mit den durchgeführten Berechnungen

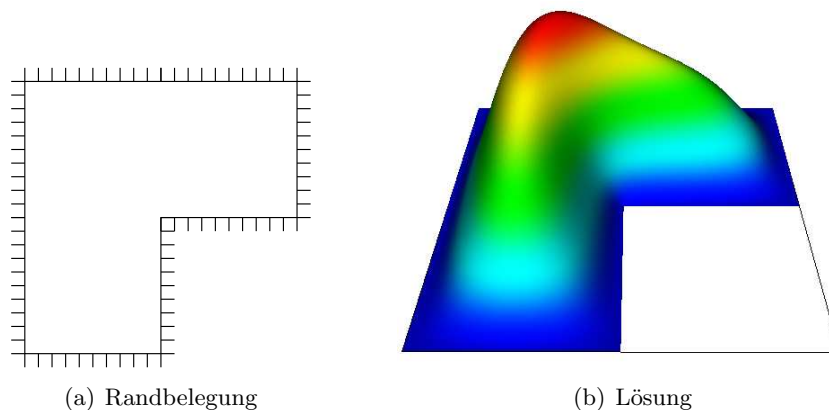


Abbildung 5.9: eingespannte Platte auf einem L-Gebiet

ergeben sich die Konvergenzordnungen, die in den Tabellen 5.21 bis 5.24 dargestellt sind. Im Gegensatz zu den Konvergenzordnungen, die die Vergleiche auf dem Einheitsquadrat lieferten, bekommen wir in diesem Beispiel niedrigere Konvergenzordnungen. Der Grund dafür ist die Singularität in der Lösung, die von der einspringenden Ecke im L-Gebiet hervorgerufen wird.

Im Gegensatz zu den Konvergenzordnungen auf dem Einheitsquadrat, gibt es in diesem Beispiel kein Verfahren, das im Vergleich zu den anderen merklich besser oder schlechter konvergiert.

Die gelenkig gelagerte Platte

Wie im vorherigen Beispiel lösen wir die Gleichung (5.2) auf dem Gebiet

$$\Omega = (-1, 1)^2 \setminus [0, 1]^2.$$

Tabelle 5.21: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
84	2.78e-03	-	9.50e-03	-	5.98e-02	-
260	3.65e-04	2.93	1.75e-03	2.44	2.14e-02	1.48
900	1.15e-04	1.67	5.51e-04	1.67	1.09e-02	0.97
3332	4.89e-05	1.23	2.28e-04	1.27	6.89e-03	0.66
12804	2.01e-05	1.28	9.18e-05	1.31	4.40e-03	0.65
50180	6.46e-06	1.64	2.95e-05	1.64	2.50e-03	0.82
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

Tabelle 5.22: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
63	2.78e-03	-	9.51e-03	-	5.98e-02	-
195	2.37e-04	3.56	1.82e-03	2.38	3.91e-02	0.61
675	4.91e-05	2.27	4.71e-04	1.95	2.10e-02	0.90
2499	1.71e-05	1.52	1.49e-04	1.66	1.07e-02	0.97
9603	6.78e-06	1.34	5.24e-05	1.51	5.76e-03	0.90
37635	2.23e-06	1.60	1.70e-05	1.62	2.94e-03	0.97
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

Tabelle 5.23: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
133	2.53e-03	-	8.79e-03	-	5.84e-02	-
481	2.98e-04	3.08	1.49e-03	2.56	1.98e-02	1.56
1825	8.48e-05	1.82	4.15e-04	1.85	9.23e-03	1.10
7105	3.55e-05	1.25	1.66e-04	1.32	5.63e-03	0.71
28033	1.46e-05	1.29	6.69e-05	1.31	3.55e-03	0.66
111361	4.69e-06	1.64	2.15e-05	1.64	1.99e-03	0.83
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

Tabelle 5.24: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
63	2.77e-03	-	9.48e-03	-	5.96e-02	-
195	6.98e-04	1.99	2.59e-03	1.87	2.78e-02	1.10
675	3.82e-04	0.87	1.44e-03	0.85	1.72e-02	0.69
2499	1.23e-04	1.63	5.40e-04	1.41	8.82e-03	0.96
9603	4.83e-05	1.36	2.22e-04	1.28	4.90e-03	0.85
37635	1.57e-05	1.62	7.25e-05	1.62	2.45e-03	1.00
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

Die Lösung wie auch die Randbelegung für die gelenkig gelagerte Platte (5.2) sind in Abbildung 5.10 zu sehen. Die Konvergenzordnungen für diesen Fall sind in den Tabellen 5.25

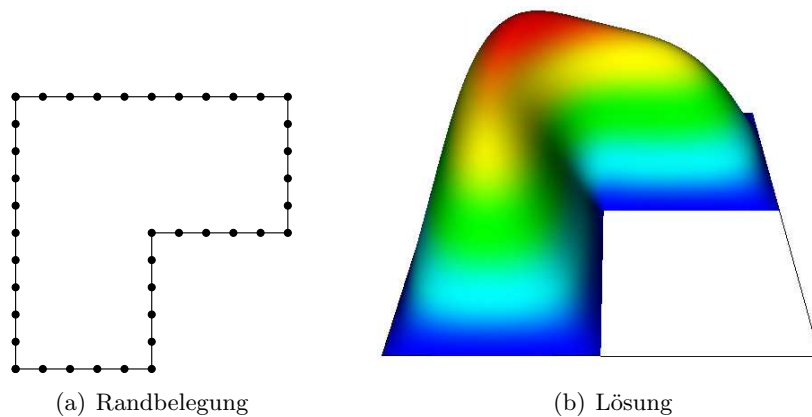


Abbildung 5.10: gelenkig gelagerte Platte auf einem L-Gebiet

bis 5.28 aufgelistet. Wie schon im vorigen Beispiel erreichen wir keine zum Einheitsquadrat vergleichbaren Konvergenzordnungen. Die Konvergenzordnungen sind noch niedriger als im Beispiel mit der rundherum eingespannten Platte. Es gibt auch bei dieser Randbelegung keine großen Unterschiede zwischen den einzelnen Verfahren.

Tabelle 5.25: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
84	4.48e-03	-	1.46e-02	-	7.69e-02	-
260	1.43e-03	1.65	4.94e-03	1.56	4.34e-02	0.82
900	7.22e-04	0.99	2.42e-03	1.03	3.07e-02	0.50
3332	3.83e-04	0.92	1.26e-03	0.94	2.23e-02	0.46
12804	1.88e-04	1.02	6.18e-04	1.03	1.56e-02	0.51
erwartet	-	0.66	-	0.66	-	0.33

Tabelle 5.26: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
63	5.55e-03	-	1.87e-02	-	1.44e-01	-
195	8.54e-04	2.70	4.24e-03	2.14	1.29e-01	0.16
675	3.52e-04	1.28	1.66e-03	1.35	6.81e-02	0.92
2499	1.83e-04	0.94	7.59e-04	1.13	4.10e-02	0.73
9603	9.13e-05	1.00	3.50e-04	1.12	2.57e-02	0.67
erwartet	-	0.66	-	0.66	-	0.33

Tabelle 5.27: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
133	3.31e-03	-	1.11e-02	-	6.95e-02	-
481	9.32e-04	1.83	3.36e-03	1.72	3.92e-02	0.83
1825	4.69e-04	0.99	1.61e-03	1.06	2.82e-02	0.47
7105	2.52e-04	0.89	8.44e-04	0.93	2.09e-02	0.43
28033	1.25e-04	1.01	4.15e-04	1.02	1.49e-02	0.49
erwartet	-	0.66	-	0.66	-	0.33

Tabelle 5.28: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
63	6.94e-03	-	2.27e-02	-	1.08e-01	-
195	3.00e-03	1.21	1.01e-02	1.18	6.96e-02	0.64
675	1.54e-03	0.97	5.01e-03	1.00	4.28e-02	0.70
2499	7.90e-04	0.96	2.59e-03	0.95	2.71e-02	0.66
9603	3.80e-04	1.06	1.25e-03	1.05	1.68e-02	0.69
erwartet	-	0.66	-	0.66	-	0.33

Wechselnde Randbedingungen

In diesem Abschnitt betrachten wir wechselnde Randbedingungen auf dem L-Gebiet

$$\Omega = (-1, 1)^2 \setminus [0, 1]^2,$$

das schon bei den vorherigen Rechnungen verwendet wurde. In allen Beispielen lösen wir die Gleichung (5.3). Wir geben unterschiedliche Randbedingungen in den verschiedenen Beispielen vor.

1. Beispiel Die Gleichung (5.3) wird auf dem L-Gebiet gelöst. Die Randbedingungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial\Omega_G &= \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega \mid x_1 \in (0, 1), x_2 = 0\}, \\ \partial\Omega_E &= \partial\Omega \setminus \partial\Omega_G. \end{aligned}$$

Diese Randbelegungen und die berechnete Lösung sind dargestellt in Abbildung 5.11. Wie bisher geben wir für diesen Fall die Konvergenzordnungen in den Tabellen 5.29 bis 5.32 an. Diese Ergebnisse sind vergleichbar mit denen der rundherum gelenkig gelagerten Platte. Die verschiedenen Verfahren konvergieren ungefähr gleich gut.

2. Beispiel Die Gleichung (5.3) wird auf dem L-Gebiet gelöst. Die Randbedingungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial\Omega_F &= \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega \mid x_1 \in (0, 1), x_2 = 0\}, \\ \partial\Omega_E &= \partial\Omega \setminus \partial\Omega_F, \end{aligned}$$

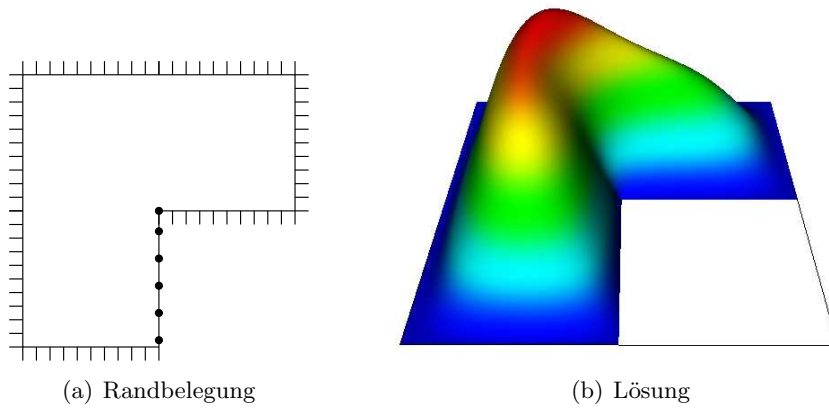


Abbildung 5.11: erstes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (E/G) auf dem L-Gebiet

Tabelle 5.29: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
84	3.15e-03	-	1.07e-02	-	6.42e-02	-
260	5.55e-04	2.51	2.40e-03	2.16	2.60e-02	1.30
900	2.36e-04	1.23	1.02e-03	1.23	1.57e-02	0.73
3332	1.21e-04	0.96	5.22e-04	0.97	1.10e-02	0.51
12804	5.91e-05	1.04	2.53e-04	1.04	7.67e-03	0.53
erwartet	-	0.66	-	0.66	-	0.33

Tabelle 5.30: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
63	3.16e-03	-	1.08e-02	-	6.43e-02	-
195	3.60e-04	3.14	2.38e-03	2.18	5.95e-02	0.11
675	1.18e-04	1.61	8.17e-04	1.54	3.28e-02	0.86
2499	6.07e-05	0.96	3.58e-04	1.19	1.89e-02	0.79
9603	3.12e-05	0.96	1.64e-04	1.12	1.15e-02	0.72
erwartet	-	0.66	-	0.66	-	0.33

Tabelle 5.31: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
133	2.66e-03	-	9.21e-03	-	6.03e-02	-
481	4.00e-04	2.74	1.82e-03	2.34	2.34e-02	1.36
1825	1.59e-04	1.33	6.96e-04	1.38	1.38e-02	0.77
7105	8.20e-05	0.96	3.51e-04	0.99	9.72e-03	0.50
28033	4.01e-05	1.03	1.70e-04	1.04	6.81e-03	0.51
erwartet	-	0.66	-	0.66	-	0.33

Tabelle 5.32: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
63	3.12e-03	-	1.07e-02	-	6.37e-02	-
195	1.01e-03	1.63	3.76e-03	1.50	3.43e-02	0.90
675	6.11e-04	0.72	2.27e-03	0.73	2.30e-02	0.58
2499	2.59e-04	1.24	1.05e-03	1.12	1.35e-02	0.77
9603	1.19e-04	1.12	5.03e-04	1.06	8.17e-03	0.72
erwartet	-	0.66	-	0.66	-	0.33

und dargestellt in Abbildung 5.12, wie auch die Lösung zu diesen Randbedingungen. In

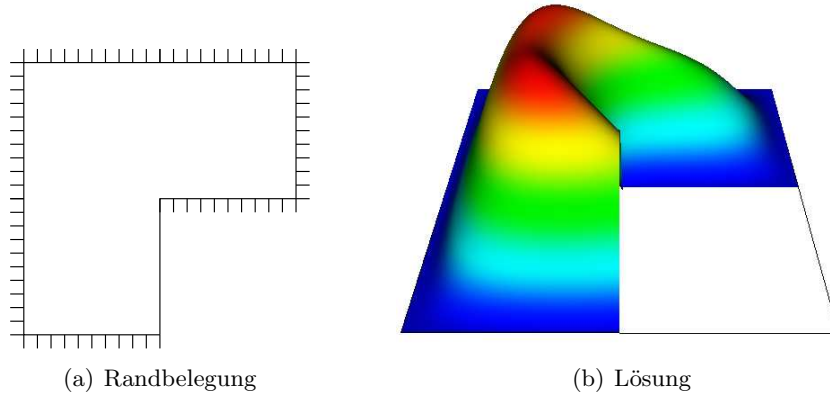


Abbildung 5.12: zweites Beispiel für wechselnde Randbedingungen (E/F) auf dem L-Gebiet

den nachfolgenden Tabellen 5.33 bis 5.36 sind die Konvergenzordnungen angegeben. Die Ergebnisse sind mit denen vom ersten Beispiel vergleichbar.

Tabelle 5.33: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$	$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$
84	3.45e-03	-	1.09e-02
260	6.34e-04	2.44	2.53e-03
900	2.83e-04	1.16	1.13e-03
3332	1.51e-04	0.91	5.95e-04
12804	7.49e-05	1.01	2.93e-04
erwartet	-	0.66	-

3. Beispiel Die Gleichung (5.3) wird auf dem L-Gebiet gelöst. Die Randbedingungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\partial\Omega_G &= \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega \mid x_1 \in (0, 1), x_2 = 0\}, \\ \partial\Omega_F &= \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega \mid x_1 = 0, x_2 \in [0, 1)\}, \\ \partial\Omega_E &= \partial\Omega \setminus (\partial\Omega_G \cup \partial\Omega_F).\end{aligned}$$

Die berechnete Lösung und die Darstellung der Randbedingungen sind in Abbildung 5.13 verdeutlicht. Hier ergeben sich die in den folgenden Tabellen 5.37 bis 5.40 dargestellten Konvergenzordnungen.

Tabelle 5.34: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
63	3.46e-03	-	1.10e-02	-	6.76e-02	-
195	3.84e-04	3.17	2.58e-03	2.09	5.76e-02	0.23
675	1.25e-04	1.62	8.84e-04	1.54	3.23e-02	0.83
2499	7.35e-05	0.77	4.15e-04	1.09	1.94e-02	0.74
9603	4.22e-05	0.80	2.08e-04	1.00	1.19e-02	0.70
erwartet	-	0.66	-	0.66	-	0.33

Tabelle 5.35: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
133	2.93e-03	-	9.50e-03	-	6.41e-02	-
481	4.31e-04	2.76	1.82e-03	2.38	2.41e-02	1.41
1825	1.67e-04	1.37	6.87e-04	1.41	1.37e-02	0.81
7105	8.69e-05	0.94	3.54e-04	0.96	9.60e-03	0.51
28033	4.35e-05	1.00	1.77e-04	1.00	6.71e-03	0.52
erwartet	-	0.66	-	0.66	-	0.33

Tabelle 5.36: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
63	3.41e-03	-	1.08e-02	-	6.70e-02	-
195	9.65e-04	1.82	3.43e-03	1.66	3.31e-02	1.02
675	5.91e-04	0.71	2.18e-03	0.65	2.21e-02	0.58
2499	2.74e-04	1.11	1.11e-03	0.98	1.37e-02	0.69
9603	1.35e-04	1.02	5.56e-04	0.99	8.70e-03	0.65
erwartet	-	0.66	-	0.66	-	0.33

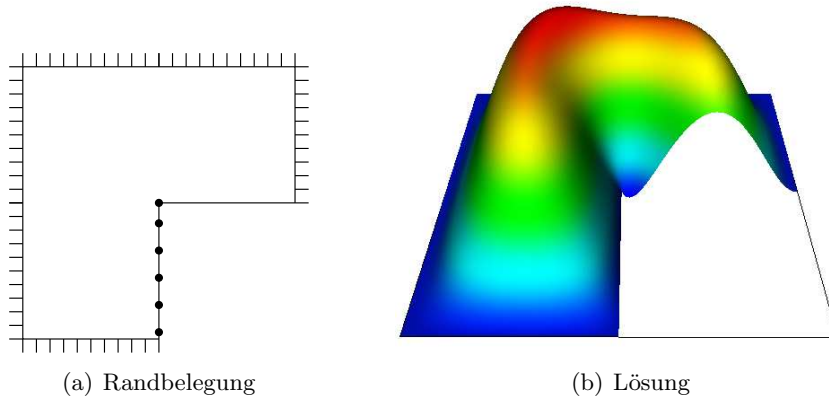


Abbildung 5.13: drittes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (G/F) auf dem L-Gebiet

Tabelle 5.37: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
84	3.50e-03	-	1.10e-02	-	6.80e-02	-
260	6.76e-04	2.37	2.63e-03	2.06	2.86e-02	1.25
900	3.06e-04	1.14	1.22e-03	1.11	1.80e-02	0.67
3332	1.66e-04	0.88	6.62e-04	0.88	1.30e-02	0.46
12804	8.51e-05	0.97	3.37e-04	0.97	9.31e-03	0.49
erwartet	-	0.66	-	0.66	-	0.33

Tabelle 5.38: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
63	3.63e-03	-	1.15e-02	-	7.52e-02	-
195	4.28e-04	3.08	2.77e-03	2.05	6.65e-02	0.18
675	1.49e-04	1.53	9.71e-04	1.51	3.49e-02	0.93
2499	8.61e-05	0.79	4.62e-04	1.07	2.04e-02	0.78
9603	4.97e-05	0.79	2.36e-04	0.97	1.23e-02	0.72
erwartet	-	0.66	-	0.66	-	0.33

Tabelle 5.39: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
133	2.94e-03	-	9.52e-03	-	6.44e-02	-
481	4.54e-04	2.70	1.84e-03	2.37	2.49e-02	1.37
1825	1.78e-04	1.35	6.83e-04	1.43	1.42e-02	0.81
7105	9.26e-05	0.94	3.53e-04	0.95	9.75e-03	0.54
28033	4.67e-05	0.99	1.79e-04	0.98	6.68e-03	0.54
erwartet	-	0.66	-	0.66	-	0.33

Tabelle 5.40: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
63	3.68e-03	-	1.18e-02	-	7.08e-02	-
195	1.17e-03	1.65	4.23e-03	1.48	3.76e-02	0.91
675	6.64e-04	0.82	2.35e-03	0.85	2.40e-02	0.65
2499	2.98e-04	1.15	1.13e-03	1.05	1.44e-02	0.74
9603	1.46e-04	1.03	5.76e-04	0.98	9.05e-03	0.67
erwartet	-	0.66	-	0.66	-	0.33

4. Beispiel Die Gleichung (5.3) wird gelöst. Die Randbedingungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\partial\Omega_F &= \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega \mid x_1 \in (0, 1) \text{ und } x_2 = 0 \text{ oder } x_2 \in (-1, 0) \text{ und } x_1 = 0\}, \\ \partial\Omega_E &= \partial\Omega \setminus \partial\Omega_F.\end{aligned}$$

Diese Belegung und die dazu berechnete Lösung sind in Abbildung 5.14 dargestellt. Die

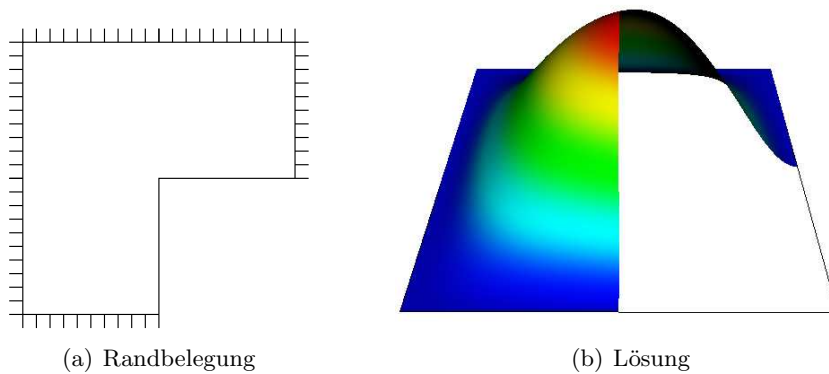


Abbildung 5.14: viertes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (F/F) auf dem L-Gebiet

Konvergenzordnungen für dieses Beispiel sind den Tabellen 5.41 bis 5.44 zu entnehmen. Bei diesem Beispiel erhalten wir im Vergleich zu den vorhergehenden Beispielen verbesserte Resultate in den Konvergenzordnungen.

Tabelle 5.41: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
84	2.24e-03	-	7.93e-03	-	5.60e-02	-
260	2.08e-04	3.43	1.27e-03	2.65	1.74e-02	1.69
900	2.12e-05	3.29	1.90e-04	2.74	5.40e-03	1.68
3332	4.25e-06	2.32	3.58e-05	2.41	2.15e-03	1.33
12804	1.22e-06	1.80	9.17e-06	1.96	1.08e-03	1.00
erwartet	-	1.32	-	1.32	-	0.66

Damit haben wir die verschiedenen Übergänge in den Randbedingungen im L-Gebiet diskutiert. Aufgrund der Singularität der Lösung, die durch die einspringende Ecke zustande kommt, erhalten wir nicht mehr so gute Konvergenzordnungen wie im Fall des Einheitsquadrats. Die verwendeten Verfahren unterscheiden sich nicht mehr signifikant.

Tabelle 5.42: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
63	1.72e-03	-	7.74e-03	-	9.33e-02	-
195	6.71e-04	1.36	3.08e-03	1.33	6.15e-02	0.60
675	1.84e-04	1.87	7.97e-04	1.95	2.18e-02	1.50
2499	4.17e-05	2.14	2.06e-04	1.95	7.03e-03	1.63
9603	8.84e-06	2.24	5.48e-05	1.91	2.68e-03	1.39
erwartet	-	1.32	-	1.32	-	0.66

Tabelle 5.43: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
133	2.14e-03	-	7.64e-03	-	5.57e-02	-
481	1.98e-04	3.43	1.22e-03	2.64	1.73e-02	1.69
1825	1.98e-05	3.32	1.82e-04	2.75	5.35e-03	1.69
7105	3.88e-06	2.36	3.35e-05	2.44	2.11e-03	1.34
28033	1.11e-06	1.81	8.48e-06	1.98	1.05e-03	1.01
erwartet	-	1.32	-	1.32	-	0.66

Tabelle 5.44: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem L-Gebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
63	4.96e-03	-	1.24e-02	-	8.40e-02	-
195	4.37e-03	0.18	1.13e-02	0.14	5.79e-02	0.54
675	8.58e-04	2.35	2.21e-03	2.35	2.10e-02	1.46
2499	1.01e-04	3.09	3.47e-04	2.67	6.71e-03	1.65
9603	1.75e-05	2.53	8.82e-05	1.98	2.71e-03	1.31
erwartet	-	1.32	-	1.32	-	0.66

5.2.3 Schlitzgebiet

Wie das Verhalten der verschiedenen Verfahren auf einem L-Gebiet ist, haben wir im vorigen Abschnitt besprochen. Wir werden in diesem Abschnitt diskutieren, wie das Verhalten der Verfahren sein wird, wenn der Winkel innerhalb des Gebietes noch größer wird. Wie schon im vorigen Abschnitt werden wir verschiedene Belegungen der Randbedingungen betrachten.

Die eingespannte Platte

Beginnen werden wir mit der rundherum eingespannten Platte auf einem Schlitzgebiet. Wir lösen die Gleichung (5.1) der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet

$$\Omega = (-1, 1)^2 \setminus \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [-1, 0], x_2 = 0\}.$$

Diese Situation haben wir in Abbildung 5.15 dargestellt. Sie zeigt zum einen die berechnete Lösung und zum anderen die Randbelegung. Im Folgenden stellen wir die Konvergenzordnungen

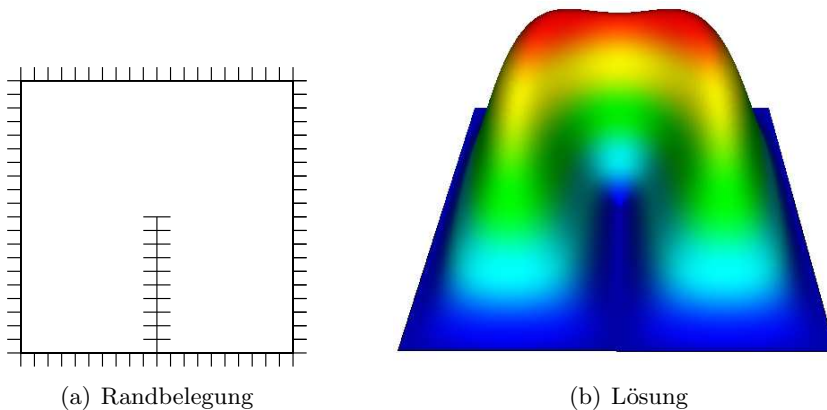


Abbildung 5.15: rundherum eingespannte Platte auf einem Schlitzgebiet

für dieses Beispiel in den Tabellen 5.45 bis 5.48 dar. Wie schon bei den Berechnungen mit dem L-Gebiet, erhalten wir niedrigere Konvergenzordnungen als beim Einheitsquadrat. Wegen der Singularität der Lösung sind die Resultate vergleichbar mit denen vom L-Gebiet. Bei den Ergebnissen zu diesem Beispiel gibt es keine großen Unterschiede zwischen den verwendeten Verfahren. Das nichtkonforme Verfahren schneidet etwas besser ab als die anderen betrachteten Verfahren. Diese liefern alle sehr ähnliche Resultate.

Tabelle 5.45: Konvergenzordnungen für das bikubische konforme Plattenelement am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
108	3.50e-03	-	1.15e-02	-	7.26e-02	-
340	4.87e-04	2.85	2.14e-03	2.42	2.62e-02	1.47
1188	1.60e-04	1.61	6.88e-04	1.63	1.34e-02	0.96
4420	6.92e-05	1.21	2.90e-04	1.25	8.52e-03	0.66
17028	2.92e-05	1.25	1.20e-04	1.27	5.50e-03	0.63
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

Tabelle 5.46: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
81	3.51e-03	-	1.15e-02	-	7.27e-02	-
255	3.20e-04	3.45	2.29e-03	2.33	4.95e-02	0.55
891	6.76e-05	2.24	6.22e-04	1.88	2.80e-02	0.82
3315	2.04e-05	1.73	2.01e-04	1.63	1.48e-02	0.92
12771	6.99e-06	1.54	6.97e-05	1.53	8.14e-03	0.87
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

Tabelle 5.47: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
175	3.20e-03	-	1.07e-02	-	7.13e-02	-
637	4.13e-04	2.95	1.89e-03	2.50	2.51e-02	1.51
2425	1.29e-04	1.68	5.68e-04	1.73	1.25e-02	1.01
9457	5.58e-05	1.21	2.36e-04	1.27	7.85e-03	0.67
37345	2.35e-05	1.24	9.79e-05	1.27	5.05e-03	0.64
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

Tabelle 5.48: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
81	3.49e-03	-	1.14e-02	-	7.24e-02	-
255	8.88e-04	1.97	3.05e-03	1.91	3.39e-02	1.09
891	5.07e-04	0.81	1.77e-03	0.78	2.12e-02	0.68
3315	1.86e-04	1.45	7.36e-04	1.27	1.13e-02	0.91
12771	7.56e-05	1.29	3.13e-04	1.23	6.40e-03	0.82
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

Die gelenkig gelagerte Platte

In diesem Abschnitt lösen wir das Problem (5.2) auf dem Schlitzgebiet

$$\Omega = (-1, 1)^2 \setminus \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [-1, 0], x_2 = 0\}.$$

Diese Situation ist dargestellt in Abbildung 5.16. Dort sieht man zum einen die Randbelegung und zum anderen die berechnete Lösung zu der obigen Aufgabe. Die errechneten Konvergenz-

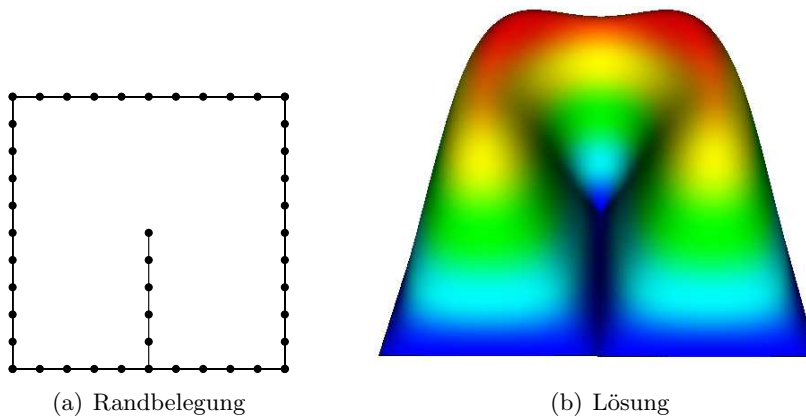


Abbildung 5.16: rundherum gelenkig gelagerte Platte auf einem Schlitzgebiet

ordnungen sind in den Tabellen 5.49 bis 5.52 dargestellt. Die Konvergenzordnungen sind bei allen Verfahren vergleichbar mit denen im vorigen Beispiel mit der rundherum eingespannten Platte. Alle Verfahren konvergieren ungefähr gleich gut. Das nichtkonforme Verfahren erzielt jedoch etwas bessere Resultate als die übrigen Verfahren.

Tabelle 5.49: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
108	4.97e-03	-	1.57e-02	-	8.84e-02	-
340	1.26e-03	1.98	4.33e-03	1.86	4.46e-02	0.99
1188	5.17e-04	1.29	1.70e-03	1.35	2.84e-02	0.65
4420	2.31e-04	1.16	7.40e-04	1.20	1.90e-02	0.58
17028	9.76e-05	1.24	3.09e-04	1.26	1.23e-02	0.62
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

Tabelle 5.50: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
81	6.01e-03	-	1.97e-02	-	1.71e-01	-
255	6.24e-04	3.27	3.94e-03	2.32	1.35e-01	0.34
891	1.37e-04	2.19	1.25e-03	1.66	6.75e-02	1.00
3315	3.67e-05	1.89	4.41e-04	1.50	3.67e-02	0.88
12771	1.19e-05	1.63	1.60e-04	1.46	2.08e-02	0.82
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

Tabelle 5.51: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
175	3.20e-03	-	1.07e-02	-	7.13e-02	-
637	4.13e-04	2.95	1.89e-03	2.50	2.51e-02	1.51
2425	1.29e-04	1.68	5.68e-04	1.73	1.25e-02	1.01
9457	5.58e-05	1.21	2.36e-04	1.27	7.85e-03	0.67
37345	2.35e-05	1.24	9.79e-05	1.27	5.05e-03	0.64
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

Tabelle 5.52: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
81	7.87e-03	-	2.51e-02	-	1.26e-01	-
255	3.03e-03	1.38	1.00e-02	1.33	7.64e-02	0.72
891	1.39e-03	1.12	4.45e-03	1.17	4.39e-02	0.80
3315	6.21e-04	1.16	1.96e-03	1.18	2.57e-02	0.77
12771	2.60e-04	1.26	8.17e-04	1.27	1.48e-02	0.80
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

Wechselnde Randbedingungen

In diesem Abschnitt betrachten wir wechselnde Randbedingungen auf dem Schlitzgebiet

$$\Omega = (-1, 1)^2 \setminus \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, x_2 \in [-1, 0]\}.$$

In allen folgenden Beispielen wird die Gleichung (5.3) auf dem Schlitzgebiet gelöst. Es werden am Schlitz wechselnde Randbedingungen vorgegeben. Die Lösung ist unterschiedlich regulär, je nach Wechsel der Randbedingung.

- 1. Beispiel** Die Gleichung (5.3) wird auf dem Schlitzgebiet gelöst. Die Randbedingungen am Schlitz sind so vorgegeben, dass an der rechten Seite die Platte gelenkig gelagert ist, während linksseitig die eingespannte Randbedingung vorgegeben wird. Die Belegung der Randbedingungen und die berechnete Lösung sind dargestellt in Abbildung 5.17. Für die beschriebenen Verfahren erhalten wir die in den Tabellen 5.53 bis 5.56 abzulesenden Konvergenzordnungen. Die Resultate sind in etwa so gut wie in den Fällen mit rundherum eingespanntem oder gelenkig gelagertem Rand.
- 2. Beispiel** In diesem Beispiel werden wir die allgemeine Gleichung (5.3) auf dem Schlitzgebiet lösen. Am Schlitz werden die Randbedingungen folgendermaßen vorgegeben: Rechts am Schlitz ist keine Bedingung vorgegeben, die Platte ist dort frei, links wird die Platte eingespannt. Diese Belegung und die dazu berechnete Lösung sind dargestellt in Abbildung 5.18. Die Berechnungen dazu ergeben die Konvergenzordnungen in den Tabellen 5.57 bis 5.60. In diesem Beispiel mit wechselnden Randbedingungen sind die Resultate weniger gut als in den vorigen Beispielen auf dem Schlitzgebiet. Die verschiedenen Verfahren unterscheiden sich nicht merklich in den Ergebnissen.

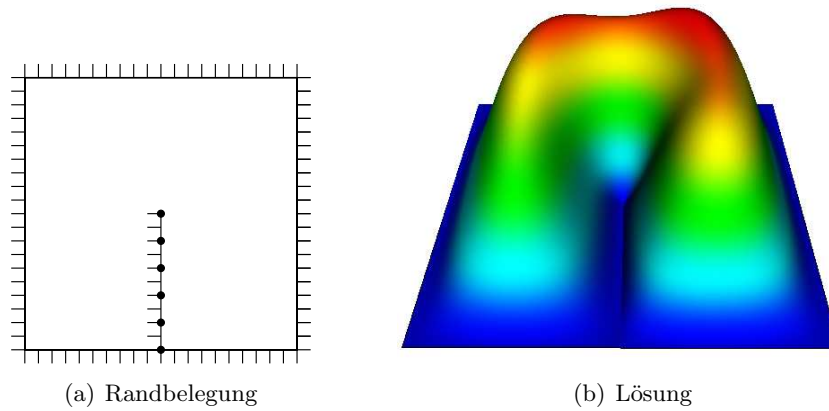


Abbildung 5.17: erstes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (E/G) auf dem Schlitzgebiet

Tabelle 5.53: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
108	3.75e-03	-	1.23e-02	-	7.58e-02	-
340	5.82e-04	2.69	2.43e-03	2.34	2.89e-02	1.39
1188	2.14e-04	1.44	8.73e-04	1.48	1.59e-02	0.86
4420	1.02e-04	1.08	4.09e-04	1.09	1.04e-02	0.61
17028	4.74e-05	1.10	1.93e-04	1.08	6.90e-03	0.60
erwartet	-	0.50	-	0.50	-	0.25

Tabelle 5.54: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
81	3.76e-03	-	1.23e-02	-	7.59e-02	-
255	3.70e-04	3.35	2.56e-03	2.27	6.56e-02	0.21
891	9.52e-05	1.96	7.72e-04	1.73	3.56e-02	0.88
3315	4.12e-05	1.21	2.96e-04	1.38	1.95e-02	0.87
12771	2.08e-05	0.98	1.28e-04	1.21	1.13e-02	0.79
erwartet	-	0.50	-	0.50	-	0.25

Tabelle 5.55: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
175	3.29e-03	-	1.10e-02	-	7.28e-02	-
637	4.59e-04	2.84	2.02e-03	2.44	2.73e-02	1.41
2425	1.54e-04	1.57	6.40e-04	1.65	1.48e-02	0.88
9457	6.99e-05	1.14	2.78e-04	1.20	9.78e-03	0.60
37345	3.13e-05	1.16	1.23e-04	1.17	6.53e-03	0.58
erwartet	-	0.50	-	0.50	-	0.25

Tabelle 5.56: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
81	3.73e-03	-	1.23e-02	-	7.55e-02	-
255	1.09e-03	1.78	3.85e-03	1.67	3.88e-02	0.96
891	6.41e-04	0.77	2.24e-03	0.78	2.51e-02	0.63
3315	2.51e-04	1.35	9.45e-04	1.25	1.38e-02	0.86
12771	1.07e-04	1.23	4.20e-04	1.17	7.91e-03	0.80
erwartet	-	0.50	-	0.50	-	0.25

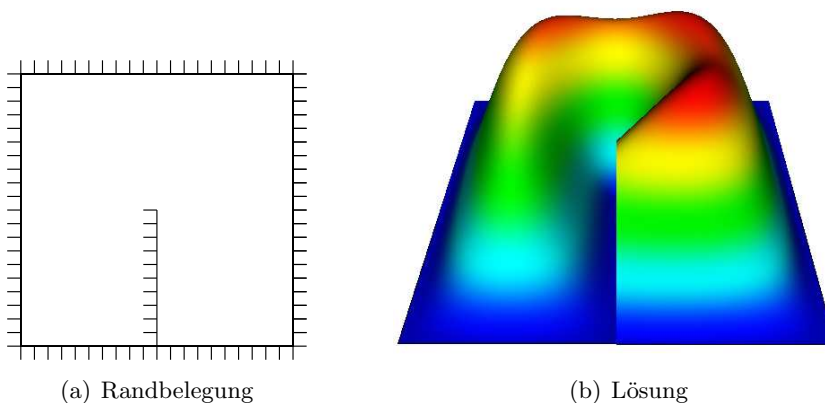
**Abbildung 5.18:** zweites Beispiel für wechselnde Randbedingungen (E/F) auf dem Schlitzgebiet

Tabelle 5.57: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
108	3.98e-03	-	1.25e-02	-	7.86e-02	-
340	6.29e-04	2.66	2.52e-03	2.31	3.00e-02	1.39
1188	2.42e-04	1.38	9.61e-04	1.39	1.67e-02	0.84
4420	1.21e-04	0.99	4.85e-04	0.99	1.12e-02	0.58
17028	5.97e-05	1.02	2.44e-04	0.99	7.57e-03	0.56
erwartet	-	0.50	-	0.50	-	0.25

Tabelle 5.58: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
81	3.98e-03	-	1.25e-02	-	7.86e-02	-
255	3.77e-04	3.40	2.74e-03	2.19	6.37e-02	0.30
891	9.84e-05	1.94	8.39e-04	1.71	3.43e-02	0.89
3315	5.28e-05	0.90	3.66e-04	1.20	1.91e-02	0.85
12771	3.18e-05	0.73	1.86e-04	0.98	1.13e-02	0.75
erwartet	-	0.50	-	0.50	-	0.25

Tabelle 5.59: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
175	3.48e-03	-	1.12e-02	-	7.57e-02	-
637	4.61e-04	2.92	1.98e-03	2.50	2.74e-02	1.47
2425	1.47e-04	1.65	6.06e-04	1.70	1.42e-02	0.95
9457	6.83e-05	1.10	2.81e-04	1.11	9.24e-03	0.62
37345	3.26e-05	1.07	1.37e-04	1.03	6.27e-03	0.56
erwartet	-	0.50	-	0.50	-	0.25

Tabelle 5.60: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
81	3.95e-03	-	1.24e-02	-	7.82e-02	-
255	1.04e-03	1.93	3.53e-03	1.82	3.76e-02	1.06
891	6.07e-04	0.77	2.13e-03	0.73	2.40e-02	0.65
3315	2.50e-04	1.28	9.82e-04	1.11	1.35e-02	0.83
12771	1.15e-04	1.12	4.76e-04	1.04	7.98e-03	0.76
erwartet	-	0.50	-	0.50	-	0.25

3. Beispiel Wie schon in den vorigen Beispielen lösen wir die Plattengleichung mit allgemeinen Randbedingungen (5.3) auf dem Schlitzgebiet. Diesmal geben wir am Schlitz des Gebiets auf der rechten Seite eine gelenkig gelagerte Bedingung vor, die andere Seite bleibt frei. Die Abbildung 5.19 zeigt diese Belegung der Randbedingung und eine dazu berechnete Lösung. Die Konvergenzordnungen zu den Berechnungen werden in den Tabellen 5.61

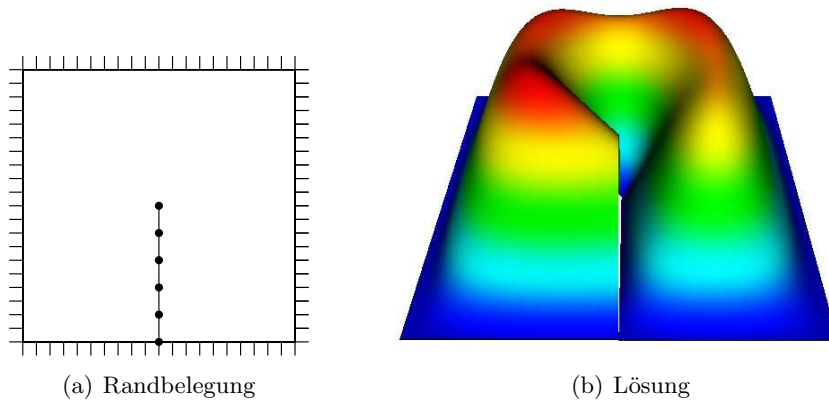


Abbildung 5.19: drittes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (G/F) auf dem Schlitzgebiet

bis 5.64 dargestellt. Wir erhalten für alle betrachteten Verfahren sehr ähnliche Resultate.

4. Beispiel Zuletzt rechnen wir die Lösung von (5.3) mit allgemeinen Randbedingungen. In diesem Beispiel geben wir am Schlitz des Gebiets keine Randbedingungen vor. An beiden Seiten des Schlitzes ist die Platte frei. Diese Randbelegung und die dazu berechnete Lösung sind in der Abbildung 5.20 verdeutlicht. Die Tabellen 5.65 bis 5.68 geben einen Überblick über die Konvergenzordnungen der verschiedenen Verfahren. Die Resultate

Tabelle 5.61: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
108	4.18e-03	-	1.32e-02	-	8.14e-02	-
340	6.63e-04	2.66	2.67e-03	2.31	3.20e-02	1.35
1188	2.33e-04	1.51	9.44e-04	1.50	1.81e-02	0.82
4420	1.03e-04	1.17	4.14e-04	1.19	1.19e-02	0.61
17028	4.49e-05	1.21	1.78e-04	1.22	7.80e-03	0.61
erwartet	-	0.50	-	0.50	-	0.25

Tabelle 5.62: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
81	4.19e-03	-	1.32e-02	-	8.15e-02	-
255	3.87e-04	3.44	2.90e-03	2.19	7.66e-02	0.09
891	7.60e-05	2.35	8.45e-04	1.78	3.98e-02	0.94
3315	2.20e-05	1.79	2.95e-04	1.52	2.14e-02	0.90
12771	1.06e-05	1.06	1.14e-04	1.37	1.21e-02	0.82
erwartet	-	0.50	-	0.50	-	0.25

Tabelle 5.63: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
175	3.64e-03	-	1.17e-02	-	7.76e-02	-
637	5.19e-04	2.81	2.15e-03	2.44	2.95e-02	1.40
2425	1.66e-04	1.64	6.67e-04	1.69	1.59e-02	0.89
9457	7.15e-05	1.22	2.80e-04	1.25	1.02e-02	0.64
37345	3.09e-05	1.21	1.21e-04	1.21	6.70e-03	0.61
erwartet	-	0.50	-	0.50	-	0.25

Tabelle 5.64: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
81	4.16e-03	-	1.32e-02	-	8.11e-02	-
255	1.20e-03	1.80	4.20e-03	1.65	4.20e-02	0.95
891	6.98e-04	0.78	2.45e-03	0.78	2.73e-02	0.62
3315	2.66e-04	1.39	1.00e-03	1.29	1.54e-02	0.83
12771	1.09e-04	1.29	4.24e-04	1.24	8.87e-03	0.80
erwartet	-	0.50	-	0.50	-	0.25

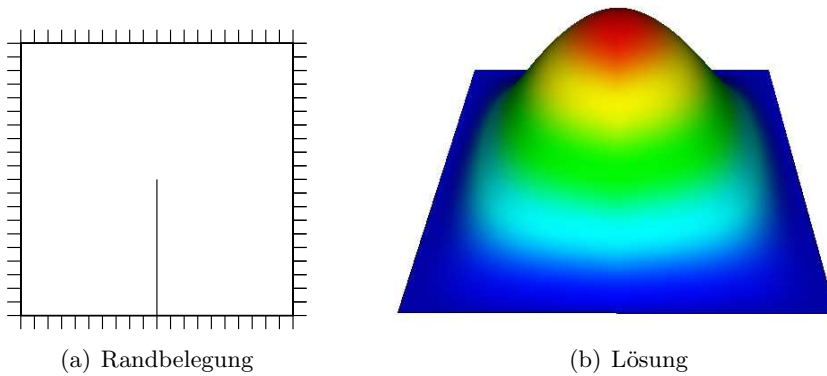


Abbildung 5.20: viertes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (F/F) auf dem Schlitzgebiet

sind wie in den schon betrachteten Beispielen. Zwischen den verschiedenen Verfahren gibt es keine großen Unterschiede in den Konvergenzordnungen.

Tabelle 5.65: Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
108	2.73e-03	-	9.21e-03	-	6.68e-02	-
340	4.39e-04	2.63	2.22e-03	2.05	2.56e-02	1.38
1188	1.58e-04	1.48	8.67e-04	1.36	1.31e-02	0.96
4420	7.14e-05	1.15	3.94e-04	1.14	8.44e-03	0.64
17028	3.05e-05	1.23	1.68e-04	1.23	5.48e-03	0.62
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

Tabelle 5.66: Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
81	1.81e-03	-	8.86e-03	-	1.12e-01	-
255	9.47e-04	0.93	3.81e-03	1.22	8.30e-02	0.44
891	2.54e-04	1.90	1.14e-03	1.74	3.14e-02	1.40
3315	5.71e-05	2.16	3.92e-04	1.54	1.32e-02	1.25
12771	1.71e-05	1.74	1.49e-04	1.40	6.62e-03	1.00
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

5.2.4 Vergleich und Beurteilung

Anhand der Vergleiche auf den verschiedenen Gebieten mit den unterschiedlichen Randbelegungen lässt sich abschließend feststellen, dass bis auf das nichtkonforme Verfahren mit dem Adini-Element die betrachteten Verfahren ähnliche Resultate liefern. Das nichtkonforme Verfahren liefert für die Berechnungen am Einheitsquadrat keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Einzig auf dem Schlitzgebiet mit rundherum gelenkig gelagertem Rand waren die Konvergenzordnungen des nichtkonformen Verfahrens mit dem Adini-Element etwas besser als die der anderen Verfahren. Um also zufriedenstellende Berechnungen zu erzielen, kann man sowohl das konforme Verfahren, das Interior-Penalty-Verfahren als auch das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element verwenden. Wie sich die Verfahren im Aufwand unterscheiden, werden wir im nächsten Abschnitt untersuchen.

Tabelle 5.67: Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
175	2.47e-03	-	8.62e-03	-	6.41e-02	-
637	3.06e-04	3.02	1.61e-03	2.42	2.17e-02	1.56
2425	8.52e-05	1.84	4.71e-04	1.77	9.04e-03	1.26
9457	3.71e-05	1.20	2.04e-04	1.21	5.26e-03	0.78
37345	1.58e-05	1.23	8.67e-05	1.23	3.29e-03	0.68
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

Tabelle 5.68: Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem Schlitzgebiet

# dofs	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^1(\Omega)}$		$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	
81	5.59e-03	-	1.38e-02	-	9.88e-02	-
255	5.45e-03	0.04	1.41e-02	-0.03	7.23e-02	0.45
891	1.21e-03	2.17	3.29e-03	2.10	2.82e-02	1.36
3315	2.21e-04	2.46	9.32e-04	1.82	1.14e-02	1.31
12771	7.28e-05	1.60	3.83e-04	1.28	6.11e-03	0.90
erwartet	-	1.00	-	1.00	-	0.50

5.3 Aufwandsanalyse

Bisher haben wir die Verfahren anhand ihrer Güte in Hinblick auf die Konvergenzordnungen untersucht. In diesem Abschnitt vergleichen wir die Verfahren anhand der Zeit, die zum Lösen des Systems benötigt wird, um die gleiche Genauigkeit zu erzielen. Wir führen eine Analyse am Beispiel der eingespannten Platte durch. Die verschiedenen Verfahren werden wir auf den unterschiedlichen Gebieten vergleichen.

5.3.1 Einheitsquadrat

Die Anzahl der Freiheitsgrade für das Interior-Penalty-Verfahren wächst sehr schnell. Dies liegt an der Platzierung der Freiheitsgrade in der Mitte der Zelle und auf den Kanten. Die anderen Verfahren verwenden nur Freiheitsgrade an den Eckpunkten der Zelle. Das wirkt sich positiv auf die Größe der Matrizen aus. Das nichtkonforme Verfahren mit dem Adini-Element und das konforme Verfahren verwenden vergleichsweise wenig Matrixeinträge gegenüber den beiden anderen Methoden. In den beiden folgenden Abbildungen 5.21 und 5.22 wird verdeutlicht, wie sich der L^2 - bzw. der H^2 -Fehler zur Anzahl der Freiheitsgrade verhält. Der H^1 -Fehler verhält sich im Wesentlichen wie der L^2 -Fehler.

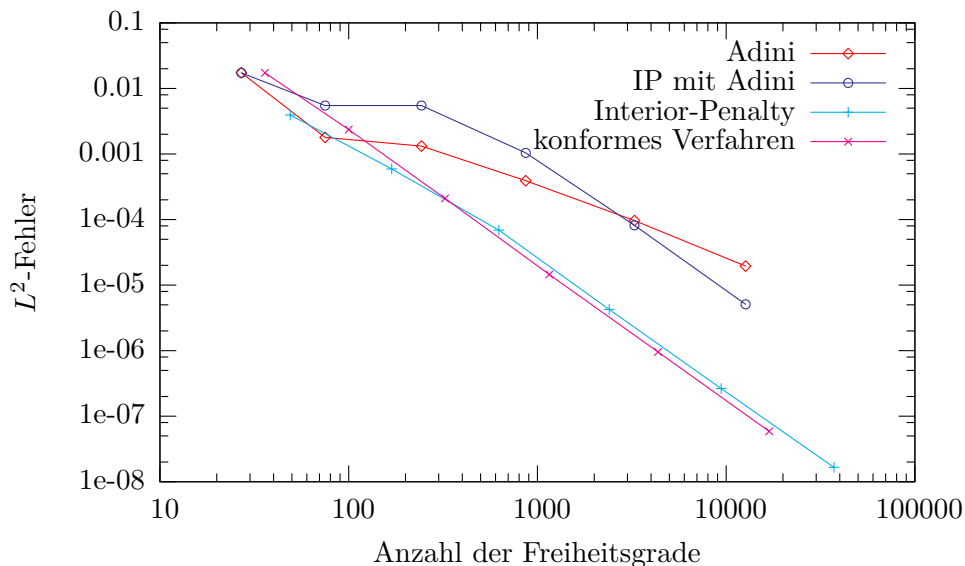


Abbildung 5.21: Verhalten des L^2 -Fehlers im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat

Die nächsten beiden Schaubilder 5.23 und 5.24 zeigen den Zeitaufwand der verschiedenen Verfahren im Vergleich zum L^2 - bzw. H^2 -Fehler. Der H^1 -Fehler verhält sich entsprechend

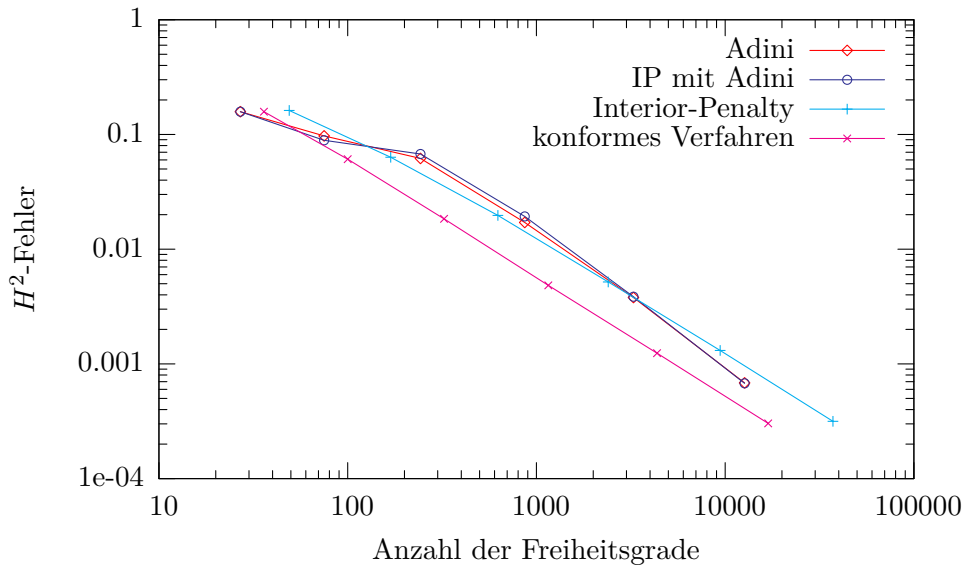


Abbildung 5.22: Verhalten des H^2 -Fehlers im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat

dem L^2 -Fehler. Beim Lösen der linearen Gleichungssysteme mit einem cg-Verfahren ist das konforme Verfahren sehr schnell. Das gilt für den L^2 - wie auch für den H^2 -Fehler. Etwas mehr Zeit benötigt das Interior-Penalty-Verfahren, um die selbe Genauigkeit im L^2 -Fehler zu erzielen. Danach folgt das nichtkonforme Verfahren mit dem Adini-Element. Am meisten Zeit benötigt das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element, um eine entsprechend genaue Lösung zu berechnen. Für den Vergleich beim H^2 -Fehler ist die Reihenfolge etwas anders. Wie schon erwähnt, löst das konforme Verfahren mit der geringsten Zeit, danach folgt das nichtkonforme Verfahren mit dem Adini-Element, gefolgt vom modifizierten Verfahren mit dem Adini-Element. Die meiste Zeit um eine entsprechende Genauigkeit im H^2 -Fehler zu erzielen, benötigt das Interior-Penalty-Verfahren.

5.3.2 L-Gebiet

Für die Berechnungen auf dem L-Gebiet geben wir eine entsprechende Analyse der Fehler, einmal im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade, zum anderen im Vergleich zur cpu-Zeit. Die beiden folgenden Abbildungen 5.25 und 5.26 stellen den L^2 - und den H^2 -Fehler im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade dar. Der H^1 -Fehler verhält sich wie der L^2 -Fehler. Die Reduktion des L^2 -Fehlers beim nichtkonformen Verfahren mit dem Adini-Element und dem Interior-Penalty-Verfahren sind fast identisch. Diese beiden Verfahren schneiden in diesem Vergleich am besten ab. Es folgen das konforme Verfahren und danach das modifizierte Verfahren mit

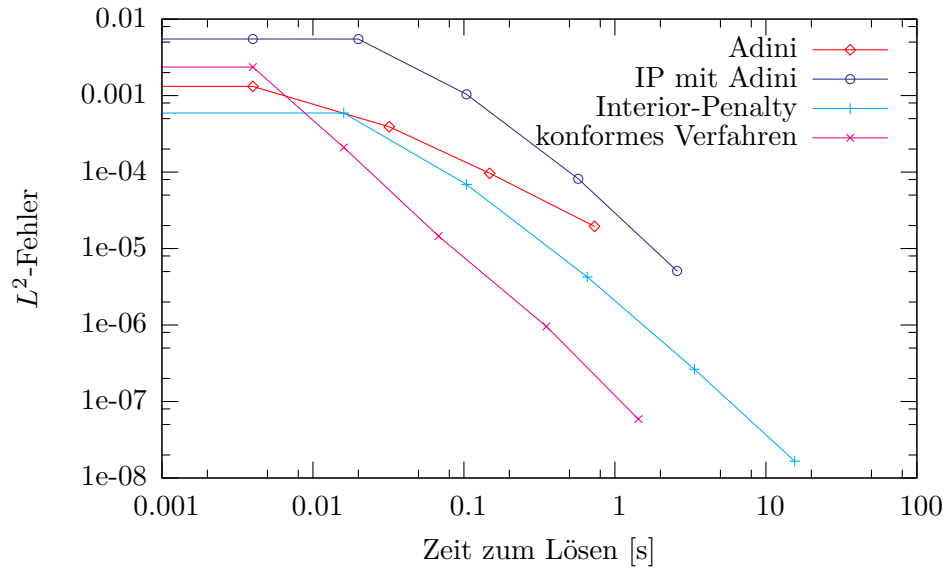


Abbildung 5.23: Verhalten des L^2 -Fehlers im Vergleich zur cpu-Zeit am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat

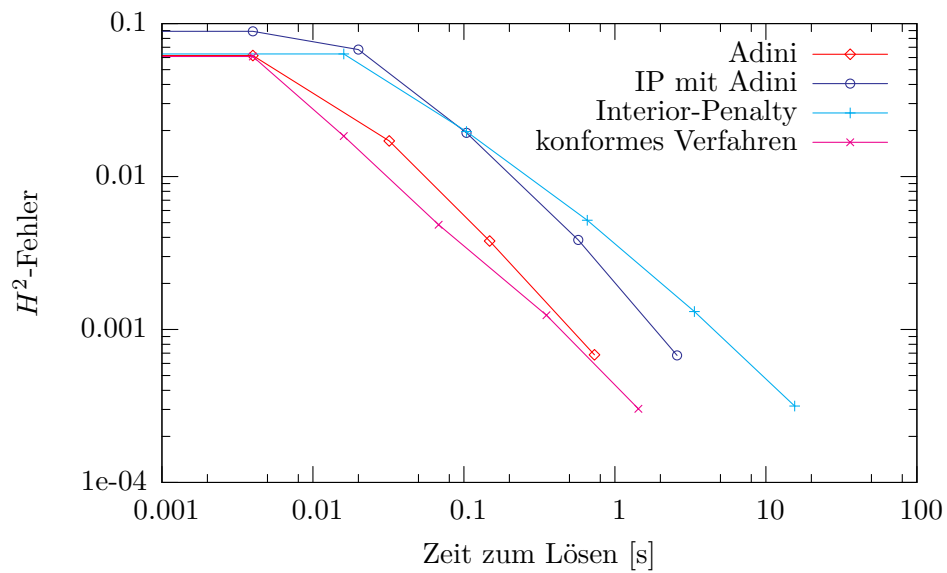


Abbildung 5.24: Verhalten des H^2 -Fehlers im Vergleich zur cpu-Zeit am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat

dem Adini-Element. Bei der Reduktion des H^2 -Fehlers gibt es keine großen Unterschiede in den einzelnen Verfahren.

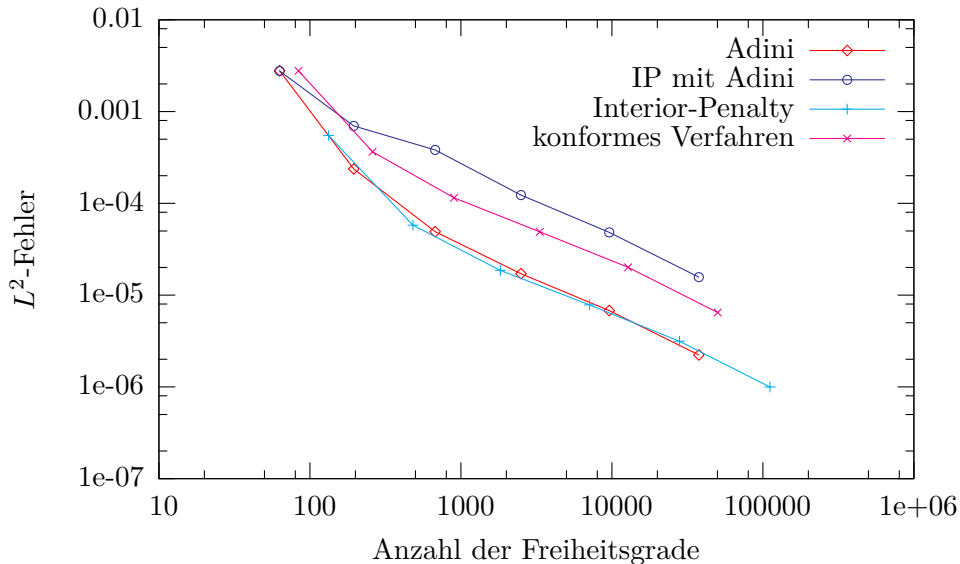


Abbildung 5.25: Verhalten des L^2 -Fehlers im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet

Für die Zeit zum Lösen der linearen Gleichungssysteme gibt es entsprechende Schaubilder 5.27 und 5.28. Das nichtkonforme Verfahren mit dem Adini-Element erreicht mit der geringsten Rechenzeit den kleinsten L^2 -Fehler. Danach folgen das Interior-Penalty-Verfahren und das konforme Verfahren. Die meiste Zeit, um eine entsprechende Genauigkeit im L^2 -Fehler zu erzielen, benötigt das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element. Beim Vergleich des H^2 -Fehlers sind die Unterschiede zwischen den Verfahren geringer. Das konforme Verfahren und das nichtkonforme Verfahren mit dem Adini-Element erreichen mit einer geringeren Zeit als das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element und dem Interior-Penalty-Verfahren einen kleineren H^2 -Fehler.

5.3.3 Schlitzgebiet

Für das Schlitzgebiet geben wir wie schon für das Einheitsquadrat und das L-Gebiet eine Analyse des L^2 - und H^2 -Fehlers im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade und im Vergleich zur cpu-Zeit. Der H^1 -Fehler verhält sich dem L^2 -Fehler entsprechend. In allen Vergleichen auf dem Schlitzgebiet verhalten sich das Adini-Verfahren und das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element fast identisch.

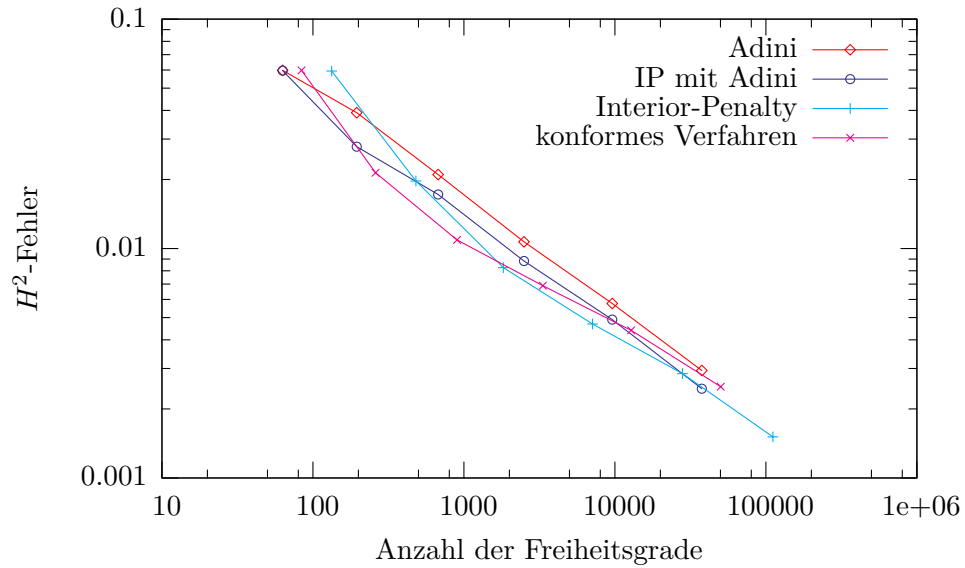


Abbildung 5.26: Verhalten des H^2 -Fehlers im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet

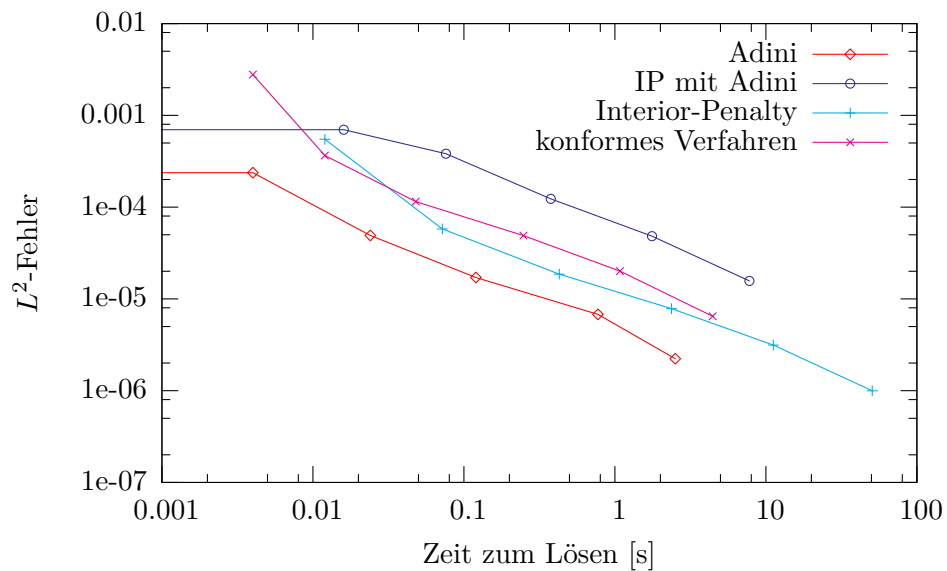


Abbildung 5.27: Verhalten des L^2 -Fehlers im Vergleich zur cpu-Zeit am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet

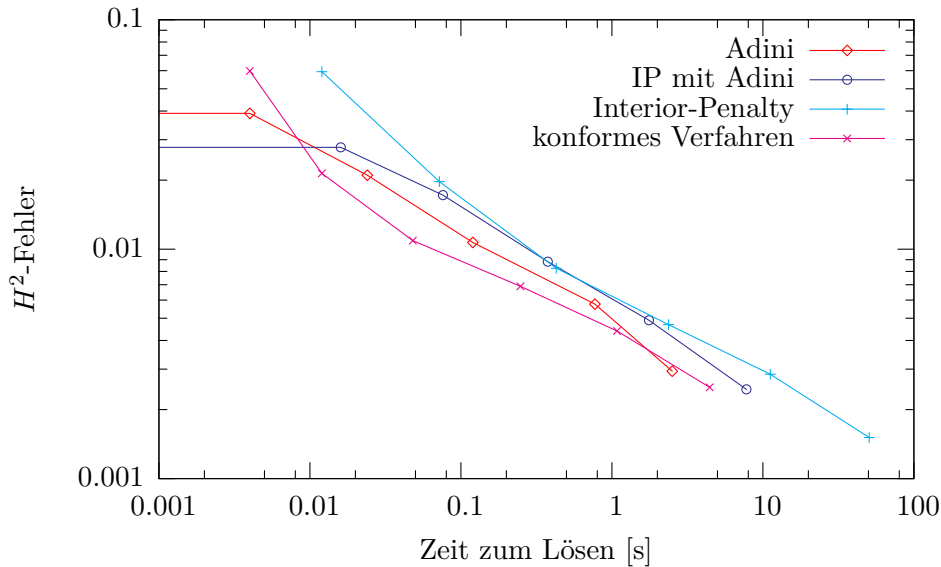


Abbildung 5.28: Verhalten des H^2 -Fehlers im Vergleich zur cpu-Zeit am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet

Die beiden folgenden Abbildungen 5.29 und 5.30 verdeutlichen den Vergleich der Fehler zur Anzahl der Freiheitsgrade. Im Vergleich der L^2 -Fehler verwendet das konforme Verfahren die wenigsten Freiheitsgrade, um eine entsprechende Genauigkeit zu erzielen. Es folgen das Interior-Penalty-Verfahren. Die meisten Freiheitsgrade verwenden das nichtkonforme Verfahren mit dem Adini-Element und das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element. Vergleicht man die Anzahl der verwendeten Freiheitsgrade, um eine Genauigkeit im H^2 -Fehler zu erhalten, gibt es keine sehr großen Unterschiede zwischen den Verfahren.

In den beiden folgenden Schaubildern 5.31 und 5.32 sind die verwendete cpu-Zeit bei Reduktion der L^2 - und H^2 -Fehler dargestellt. Das konforme Verfahren verwendet am wenigsten Zeit, um einen vergleichbaren Fehler in der L^2 -Norm zu erzielen. Es folgt das Interior-Penalty-Verfahren. Die meiste Zeit benötigen das nichtkonforme Verfahren mit dem Adini-Element und das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element. Bei der Reduktion der H^2 -Fehler ist wiederum das konforme Verfahren das schnellste, diesmal gefolgt von dem nichtkonformen Verfahren mit dem Adini-Element und dem modifizierten Verfahren mit dem Adini-Element. In diesem Vergleich benötigt das Interior-Penalty-Verfahren die meiste Zeit, um eine entsprechende Genauigkeit in der H^2 -Seminorm zu erzielen.

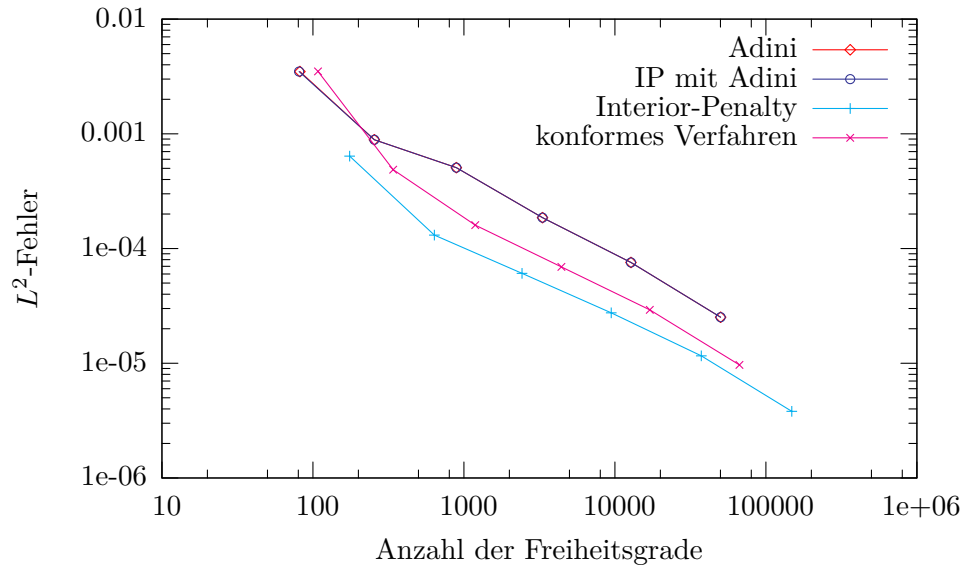


Abbildung 5.29: Verhalten des L^2 -Fehlers im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet

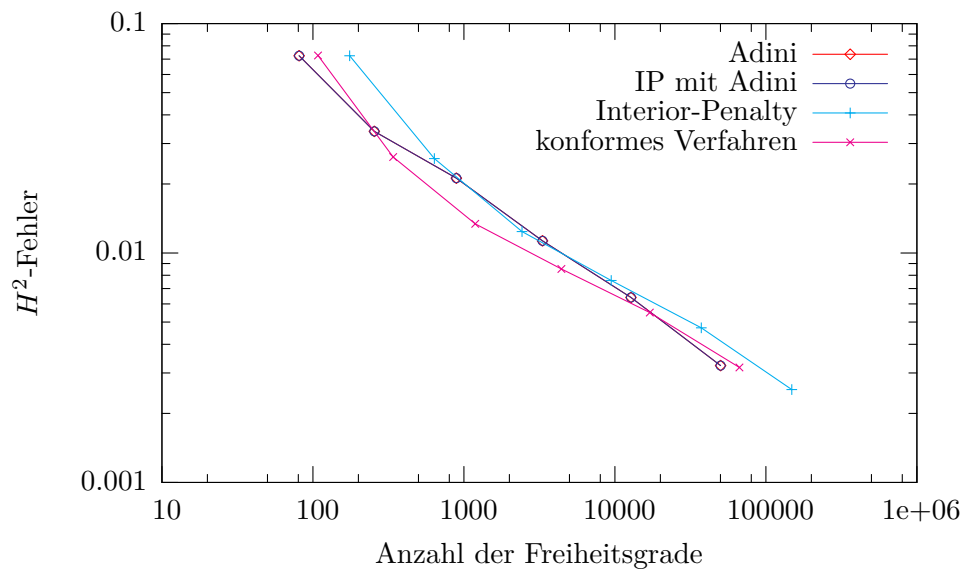


Abbildung 5.30: Verhalten des H^2 -Fehlers im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet

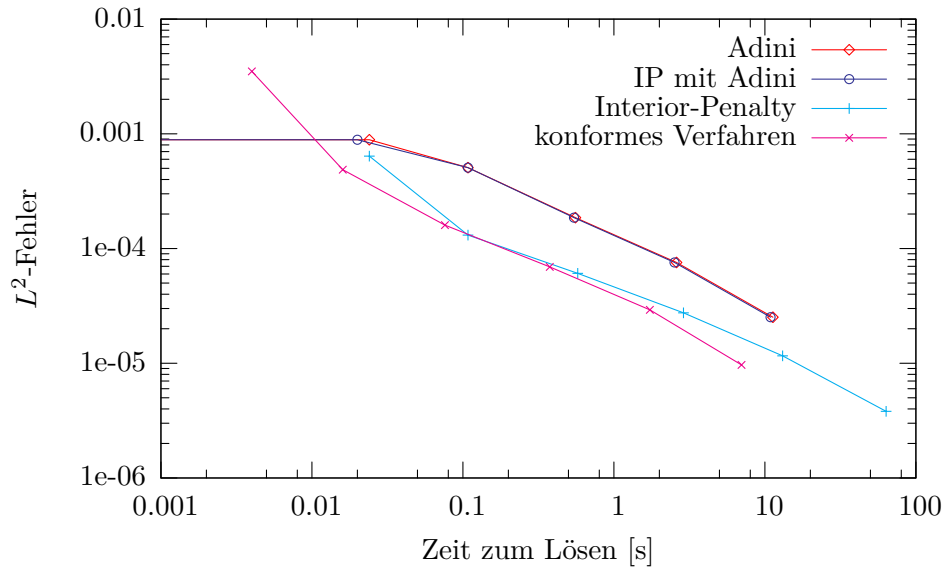


Abbildung 5.31: Verhalten des L^2 -Fehlers im Vergleich zur cpu-Zeit am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet

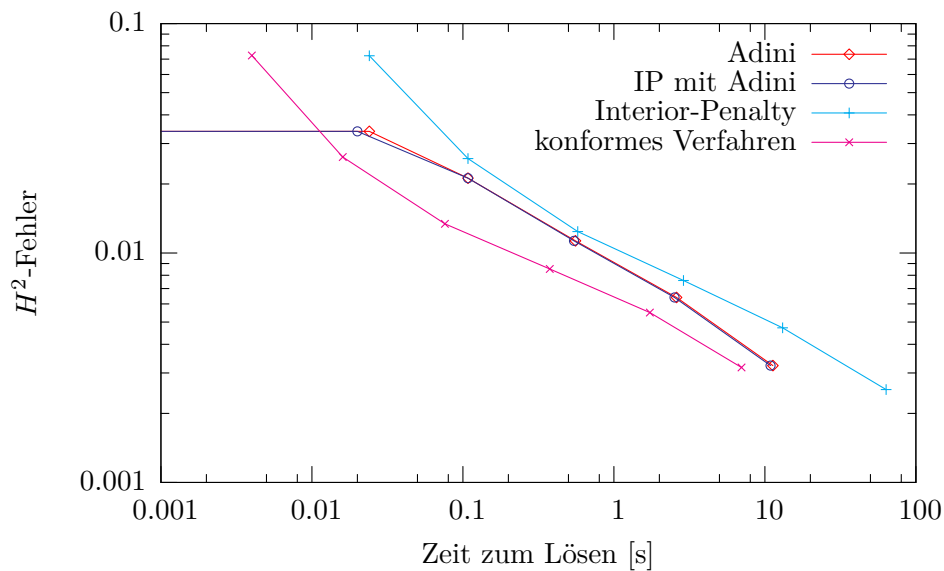


Abbildung 5.32: Verhalten des H^2 -Fehlers im Vergleich zur cpu-Zeit am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet

5.3.4 Vergleich und Beurteilung

Um einen Überblick für den Zeitaufwand zu bekommen, geben wir die Tabellen 5.69 und 5.70 an. Die Bezeichnungen sind wie folgt definiert: Das Verfahren schneidet im Vergleich sehr gut ++, gut +, mittelmäßig o und schlecht ab –.

Tabelle 5.69: Überblick zum Zeitaufwand beim L^2 -Fehler

$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	Einheitsquadrat	L-Gebiet	Schlitzgebiet
Adini	–	++	o
IP mit Adini	o	o	o
Interior-Penalty	+	+	+
konformes Verfahren	++	+	++

Tabelle 5.70: Überblick zum Zeitaufwand beim H^2 -Fehler

$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	Einheitsquadrat	L-Gebiet	Schlitzgebiet
Adini	+	++	o
IP mit Adini	o	+	+
Interior-Penalty	–	o	+
konformes Verfahren	++	++	++

Für das Lösen auf dem Einheitsquadrat und dem Schlitzgebiet sollte im Hinblick auf den Zeitaufwand das konforme Verfahren verwendet werden. Auf dem L-Gebiet schneidet das nichtkonforme Verfahren mit dem Adini-Element am besten ab. Für den Vergleich anhand der Freiheitsgrade geben wir einen Überblick in den folgenden Tabellen 5.71 und 5.72.

Tabelle 5.71: Überblick zur Anzahl der Freiheitsgrade beim L^2 -Fehler

$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	Einheitsquadrat	L-Gebiet	Schlitzgebiet
Adini	–	++	o
IP mit Adini	o	o	o
Interior-Penalty	+	++	++
konformes Verfahren	++	+	+

Tabelle 5.72: Überblick zur Anzahl der Freiheitsgrade beim H^2 -Fehler

$ u - u_h _{H^2(\Omega)}$	Einheitsquadrat	L-Gebiet	Schlitzgebiet
Adini	+	+	++
IP mit Adini	+	+	++
Interior-Penalty	o	+	o
konformes Verfahren	++	+	+

Aus den Tabellen geht hervor, dass das konforme Verfahren im Vergleich anhand der Freiheitsgrade auf dem Einheitsquadrat ebenfalls am besten abschneidet. Auf dem L-Gebiet sollte das Interior-Penalty-Verfahren oder das nichtkonforme Verfahren verwendet werden. Beim Schlitzgebiet kommt es darauf an, ob man an den L^2 - bzw. H^2 -Fehlern interessiert ist. Um gute Resultate in den L^2 -Fehlern zu bekommen, sollte man das Interior-Penalty-Verfahren verwenden. Liegt das Interesse bei einer guten Reduktion der H^2 -Fehler, sollte hingegen das nichtkonforme Verfahren oder das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element verwendet werden. Für allgemeine Gebiete ist das konforme Verfahren jedoch nicht mehr verwendbar, wie wir in Abschnitt 4.6 beschrieben haben.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel fassen wir die Ergebnisse dieser Arbeit noch einmal zusammen. Wir geben einen Ausblick, was weiterhin interessant zu untersuchen ist und was somit in Zukunft Gegenstand von Forschungen sein könnte.

Ziel dieser Arbeit war es, verschiedene Verfahren zur Lösung der Plattengleichung zu untersuchen und zu vergleichen. Wir haben die betrachteten Verfahren vorgestellt und theoretische Analysen durchgeführt. Anhand numerischer Berechnungen wurden alle betrachteten Verfahren analysiert und verglichen. Abschließend lässt sich feststellen, dass das konforme Verfahren sehr leistungsfähig ist. Bei der Konvergenzanalyse war das konforme Verfahren vergleichbar mit den anderen Verfahren. In der Aufwandsanalyse schnitt das konforme Verfahren auf dem Einheitsquadrat sehr gut ab. Auf allgemeinen Gebieten kann das konforme Verfahren nicht verwendet werden.

Je nach dem, auf welchem Gebiet gerechnet wird, sollte man das entsprechende Verfahren verwenden. Auf dem Einheitsquadrat sollte man, wie gesagt, das konforme Verfahren verwenden. Auf dem L-Gebiet hat das Adini-Verfahren gut im Vergleich zu den anderen Verfahren abgeschnitten. Für das Schlitzgebiet kann man keine allgemeine Empfehlung geben. Welches Verfahren auf dem Schlitzgebiet verwendet werden sollte, hängt davon ab, ob man eher an einer kurzen Rechenzeit oder an wenigen Freiheitsgraden interessiert ist.

Die Modifikation mit dem Adini-Element hat zwar die optimalen Konvergenzordnungen ergeben, bei der Aufwandsanalyse schneidet das Verfahren im Vergleich zu den anderen Verfahren schlechter ab.

Wir haben in dieser Arbeit nur Vergleiche auf kartesischen Gittern gezeigt. Weiter von Interesse ist, wie sich die beschriebenen Verfahren auf nichtkartesischen Gittern verhalten.

Der Aufwand wurde bisher anhand der cpu-Zeit und der Anzahl der Freiheitsgrade verglichen. Es wurde nicht berücksichtigt, wieviel Zeit der Matrixaufbau der unterschiedlichen Verfahren benötigt. Außerdem sind wir nicht darauf eingegangen, wie hoch der Programmieraufwand bei den verschiedenen Verfahren ist.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Ort, Datum, Unterschrift

Abbildungsverzeichnis

3.1	Dreidimensionales Bild einer vertikal belasteten Platte	9
3.2	Kritischer Randpunkt	15
4.1	Bogner-Fox-Schmit-Element	23
4.2	Adini-Element	27
4.3	Adini-Element mit Beschriftung der Seiten	34
4.4	Zerlegung des Gebietes Ω in gleichförmige Rechtecke	39
4.5	C^0 -Element	49
5.1	Der L^2 -Fehler bei unterschiedlichen Strafparametern	64
5.2	Anzahl der Iterationsschritte bei unterschiedlichen Strafparametern	64
5.3	Darstellung der verschiedenen Randbedingungen	65
5.4	rundherum eingespannte Platte	66
5.5	rundherum gelenkig gelagerte Platte	69
5.6	erstes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (G/F) auf dem Einheitsquadrat	71
5.7	zweites Beispiel für wechselnde Randbedingungen (E/F), (G/F) auf dem Einheitsquadrat	73
5.8	drittes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (E/F) auf dem Einheitsquadrat	75
5.9	eingespannte Platte auf einem L-Gebiet	78
5.10	gelenkig gelagerte Platte auf einem L-Gebiet	80
5.11	erstes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (E/G) auf dem L-Gebiet . .	83
5.12	zweites Beispiel für wechselnde Randbedingungen (E/F) auf dem L-Gebiet . .	85
5.13	drittes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (G/F) auf dem L-Gebiet . .	87
5.14	viertes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (F/F) auf dem L-Gebiet . .	89
5.15	rundherum eingespannte Platte auf einem Schlitzgebiet	91
5.16	rundherum gelenkig gelagerte Platte auf einem Schlitzgebiet	93
5.17	erstes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (E/G) auf dem Schlitzgebiet	96
5.18	zweites Beispiel für wechselnde Randbedingungen (E/F) auf dem Schlitzgebiet	97
5.19	drittes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (G/F) auf dem Schlitzgebiet	99
5.20	viertes Beispiel für wechselnde Randbedingungen (F/F) auf dem Schlitzgebiet .	101
5.21	Verhalten des L^2 -Fehlers im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat	104
5.22	Verhalten des H^2 -Fehlers im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat	105
5.23	Verhalten des L^2 -Fehlers im Vergleich zur cpu-Zeit am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat	106

5.24	Verhalten des H^2 -Fehlers im Vergleich zur cpu-Zeit am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat	106
5.25	Verhalten des L^2 -Fehlers im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet	107
5.26	Verhalten des H^2 -Fehlers im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet	108
5.27	Verhalten des L^2 -Fehlers im Vergleich zur cpu-Zeit am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet	108
5.28	Verhalten des H^2 -Fehlers im Vergleich zur cpu-Zeit am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet	109
5.29	Verhalten des L^2 -Fehlers im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet	110
5.30	Verhalten des H^2 -Fehlers im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet	110
5.31	Verhalten des L^2 -Fehlers im Vergleich zur cpu-Zeit am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet	111
5.32	Verhalten des H^2 -Fehlers im Vergleich zur cpu-Zeit am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet	111

Tabellenverzeichnis

3.1	Regularität der Lösung für $f \in L^2(\Omega)$ in Abhängigkeit vom inneren Winkel und von der Randbelegung	17
3.2	Größen innerer Winkel in kritischen Randpunkten	17
5.1	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat	67
5.2	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat	67
5.3	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat	68
5.4	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Einheitsquadrat	68
5.5	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Einheitsquadrat	69
5.6	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Einheitsquadrat	70
5.7	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Einheitsquadrat	70
5.8	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Einheitsquadrat	70
5.9	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Einheitsquadrat . . .	72
5.10	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Einheitsquadrat	72
5.11	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Einheitsquadrat	73
5.12	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Einheitsquadrat	73
5.13	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F), (G/F) auf dem Einheitsquadrat	74
5.14	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F), (G/F) auf dem Einheitsquadrat	74
5.15	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F), (G/F) auf dem Einheitsquadrat	74

5.16	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F), (G/F) auf dem Einheitsquadrat	75
5.17	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Einheitsquadrat	76
5.18	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Einheitsquadrat . . .	76
5.19	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Einheitsquadrat	77
5.20	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Einheitsquadrat	77
5.21	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet	79
5.22	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet	79
5.23	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet	79
5.24	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element am Beispiel der eingespannten Platte auf dem L-Gebiet	80
5.25	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem L-Gebiet	81
5.26	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem L-Gebiet	81
5.27	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem L-Gebiet	81
5.28	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem L-Gebiet	82
5.29	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem L-Gebiet	83
5.30	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem L-Gebiet	83
5.31	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem L-Gebiet	84
5.32	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem L-Gebiet	84
5.33	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem L-Gebiet	85
5.34	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem L-Gebiet	86
5.35	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem L-Gebiet	86
5.36	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem L-Gebiet	86

5.37	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem L-Gebiet	87
5.38	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem L-Gebiet	87
5.39	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem L-Gebiet	88
5.40	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem L-Gebiet	88
5.41	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem L-Gebiet	89
5.42	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem L-Gebiet	90
5.43	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem L-Gebiet	90
5.44	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem L-Gebiet	90
5.45	Konvergenzordnungen für das bikubische konforme Plattenelement am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet	92
5.46	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet	92
5.47	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet	92
5.48	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element am Beispiel der eingespannten Platte auf dem Schlitzgebiet	93
5.49	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Schlitzgebiet	94
5.50	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Schlitzgebiet	94
5.51	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Schlitzgebiet	94
5.52	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element am Beispiel der gelenkig gelagerten Platte auf dem Schlitzgebiet	95
5.53	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem Schlitzgebiet	96
5.54	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem Schlitzgebiet	96
5.55	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem Schlitzgebiet	97
5.56	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das erste Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/G) auf dem Schlitzgebiet	97
5.57	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Schlitzgebiet .	98
5.58	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Schlitzgebiet	98

5.59	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Schlitzgebiet	98
5.60	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das zweite Beispiel wechselnder Randbedingungen (E/F) auf dem Schlitzgebiet	99
5.61	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Schlitzgebiet . .	100
5.62	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Schlitzgebiet	100
5.63	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Schlitzgebiet	100
5.64	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das dritte Beispiel wechselnder Randbedingungen (G/F) auf dem Schlitzgebiet	101
5.65	Konvergenzordnungen für das konforme bikubische Plattenelement für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem Schlitzgebiet . .	102
5.66	Konvergenzordnungen für das nichtkonforme Adini-Element für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem Schlitzgebiet	102
5.67	Konvergenzordnungen für das Interior-Penalty-Verfahren für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem Schlitzgebiet	103
5.68	Konvergenzordnungen für das modifizierte Verfahren mit dem Adini-Element für das vierte Beispiel wechselnder Randbedingungen (F/F) auf dem Schlitzgebiet	103
5.69	Überblick zum Zeitaufwand beim L^2 -Fehler	112
5.70	Überblick zum Zeitaufwand beim H^2 -Fehler	112
5.71	Überblick zur Anzahl der Freiheitsgrade beim L^2 -Fehler	112
5.72	Überblick zur Anzahl der Freiheitsgrade beim H^2 -Fehler	113

Literaturverzeichnis

- Adams und Fournier 2005** ADAMS, R. A. ; FOURNIER, J. J. F.: *Sobolev Spaces*. Second edition, Reprinted. Academic Press, 2005 (Referenziert auf S. 7)
- Bangerth u. a. 2006** BANGERTH, W. ; HARTMANN, R. ; KANSCHAT, G.: deal.II – a General Purpose Object Oriented Finite Element Library / Institute for Scientific Computation, Texas A&M University. 2006 (ISC-06-02-MATH). – Forschungsbericht (Referenziert auf S. 3)
- Becker u. a.** BECKER, R. ; DUNNE, Th. ; MEIDNER, D.: VISUSIMPLE: *An open source interactive visualization utility for scientific computing*. – URL <http://visusimple.uni-hd.de/> (Referenziert auf S. 3)
- Blum und Rannacher 1980** BLUM, H. ; RANNACHER, R.: On the Boundary Value Problem of the Biharmonic Operator on Domains with Angular Corners. In: *Math. Meth in the Appl. Sci* 2 (1980), S. 556–581 (Referenziert auf S. 2, 14, 17)
- Bogner u. a.** BOGNER, F. K. ; FOX, R. L. ; SCHMIT, L. A.: The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas. In: *Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*. Wright Patterson A.F.B., Dayton, OH, S. 397 – 444 (Referenziert auf S. 1, 23)
- Braess 1997** BRAESS, D.: *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. 2. Auflage. Springer-Verlag, 1997 (Referenziert auf S. 2, 61)
- Brenner 2003** BRENNER, S. C.: Poincaré-Friedrichs inequalities for piecewise H^1 functions. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 41 (2003), S. 306–324 (Referenziert auf S. 52)
- Brenner und Scott 2005** BRENNER, S. C. ; SCOTT, L. R.: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. 2005 (Referenziert auf S. 23)
- Brenner und Sung 2005** BRENNER, S. C. ; SUNG, L.-Y.: C^0 Interior Penalty Methods for Fourth Order Elliptic Boundary Value Problems on Polygonal Domians. In: *Sci. Comput.* 1 (2005), S. 83–118 (Referenziert auf S. 2, 49, 51, 54)
- Ciarlet 1987** CIARLET, P. G.: Basic Error Estimates for Elliptic Problems. In: CIARLET, P. G. (Hrsg.) ; LIONS, J. L. (Hrsg.): *The Finite Element Methods for Elliptic Problems*. North-Holland, 1987, S. 17 – 351 (Referenziert auf S. 1)
- Ciarlet und Lions 1991** CIARLET, P. G. (Hrsg.) ; LIONS, J. L. (Hrsg.): *Finite Element Methods (Part 1)*. North-Holland, 1991 (Referenziert auf S. 22, 24, 27)
- Dunne und Becker 2006** DUNNE, Th. ; BECKER, R.: VISUSIMPLE: An interactive open source visualization utility for scientific computing. In: JÄGER, W. (Hrsg.) ; RANNACHER,

- R. (Hrsg.) ; WARNATZ, J. (Hrsg.): *Reactive Flows, Diffusion and Transport*, Springer, 2006, S. 635 – 651 (Referenziert auf S. 3)
- Kondrat'ev 1967** KONDRAT'EV, V. A.: Boundary problems for elliptic equations with conical or angular points. In: *Trans. Moscow Math. Soc.* 16 (1967), S. 227–313 (Referenziert auf S. 16)
- Lauscaux und Lesaint 1975** LAUSCAUX, P. ; LESAIN, P.: Some Nonconforming Finite Elements for the Plate Bending Problem. In: *RAIRO Oper. Res.* 9, R-1 (1975), S. 9–53 (Referenziert auf S. 2, 31)
- Melzer und Rannacher 1979** MELZER, H. ; RANNACHER, R.: Spannungskonzentrationen in Eckpunkten der vertikal belasteten Kirchhoffschen Platte / Universität Bonn. 1979 (270). – Preprint (Referenziert auf S. 2, 14, 16)
- Rannacher 1976/77** RANNACHER, R.: *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen II, Methode der Finiten Elemente*, Institut für angewandte Mathematik, Universität Bonn, Vorlesungsskriptum, 1976/77 (Referenziert auf S. 10)
- Rannacher 2000/01** RANNACHER, R.: *Numerische Methoden für partielle Differentialgleichungen (Numerische Mathematik 2)*, Institut für angewandte Mathematik, Universität Heidelberg, Vorlesungsskriptum, 2000/01 (Referenziert auf S. 21, 22, 38)
- Rannacher 2001** RANNACHER, R.: *Numerische Methoden für Probleme der Kontinuumsmechanik (Numerische Mathematik 3)*, Institut für angewandte Mathematik, Universität Heidelberg, Vorlesungsskriptum, 2001 (Referenziert auf S. 2, 19)
- Schwarz 1984** SCHWARZ, H. R.: *Methode der finiten Elemente*. Teubner, 1984 (Referenziert auf S. 60, 61)