

DD1350 Logik för dataloger

TENTAMEN

12 januari 2015, 14.00 - 19.00

Johan Boye

KTH CSC

Skriv varje problem på ett separat blad. Skriv ditt namn på alla blad. Flera formelblad är bifogade; inga andra hjälpmedel är tillåtna.

Del E

Om du fick minst betyg E på kontrollskrivningen i oktober 2014 kan du hoppa över första uppgiften, som då redan är godkänd. För att uppnå betyg E krävs 16 poäng på E-delen, inklusive tillgodoräknade bonuspoäng från hemtal och labbar. För betyg Fx krävs minst 1 poäng på varje E-uppgift, och 15 poäng sammanlagt på E-delen.

1. Bevisa följande sekvent med naturlig deduktion:

4

$$((p \rightarrow \neg q) \rightarrow r) \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow (\neg q \rightarrow (r \rightarrow \neg p))$$

Rita tydligt alla boxar för att visa räckvidden för alla antaganden i beviset.

2. Skriv en korrekt svensk mening som uttrycker **negationen** till påståendet “*Om inte solen skiner så kommer inte mina tomater att mogna.*” **Använd bara ord från ursprungsmeningen**, plus möjligen något eller några av småorden “och”, “eller”.

4

3. Avgör om beviset nedan är korrekt. Om det inte är korrekt, tala om vad som är fel.

4

1	$\forall x(P(x))$	Premiss
2	$P(x_0)$	$\forall x$ e 1
3	$\exists x(\neg P(x))$	Antagande
4	$x_0 \neg P(x_0)$	Antagande
5	$\perp$	$\neg$ e 2,4
6	$\perp$	$\exists x$ e 4-5
7	$\neg \exists x(\neg P(x))$	$\neg$ i 3-6

4. Ge exempel på en predikatlogisk formel som **inte** innehåller några konstanter eller fria variabler, och som bara är sann i modeller vars universum innehåller **minst två element**. Ge en kort motivering till varför din formel uppfyller dessa krav.

4

5. Studenterna Anna och Beata diskuterar predikatlogik:

4

Anna: “Om jag kan bevisa sekventen $\vdash \Phi$ med naturlig deduktion så finns det inget bevis för $\vdash \neg \Phi$.”

Beata: “Ja, för varje sluten formel Φ kan man ju alltid bevisa antingen $\vdash \Phi$ eller $\vdash \neg \Phi$ ”.

Vilket av följande alternativ är rätt? Motivera!

- (a) Anna och Beata påstår ekvivalenta saker och båda har rätt.
- (b) Anna och Beata påstår ekvivalenta saker och båda har fel.
- (c) Anna och Beata påstår inte ekvivalenta saker men båda har rätt.
- (d) Anna och Beata påstår inte ekvivalenta saker men båda har fel.
- (e) Anna har rätt och Beata har fel.
- (f) Anna har fel och Beata har rätt.

6. Låt $Atoms = \{lock_A, lock_B\}$, där $lock_A$ betyder “dokumentet är låst för redigering av användare A” och $lock_B$ betyder “dokumentet är låst för redigering av användare B”. Betrakta följande systemegenskaper: 4
- (a) Systemet kommer aldrig att hamna i ett tillstånd där dokumentet är låst av både användare A och B.
 - (b) Det är alltid möjligt att nå ett tillstånd där dokumentet är låst för redigering av användare A.
 - (c) Det är alltid möjligt att nå ett tillstånd där dokumentet är låst för redigering av användare B.
 - (d) Det är alltid möjligt att nå ett tillstånd där dokumentet inte är låst för redigering av någon användare.

Formulera ovanstående egenskaper som **temporallogiska formler**. Skapa sedan en **temporallogisk modell** med ett tillstånd s_0 i vilket dina fyra formler är sanna.

Del C

Om du fick betyg C på kontrollskrivningen i oktober 2014 kan du hoppa över första uppgiften, som då redan är godkänd. För att uppnå betyg C krävs 12 poäng, och för betyg D krävs 8 poäng på C-delen. I bägge fallen krävs även godkänt på E-delen.

7. Hitta en formel Φ sådan att $\forall x(P(x)) \models \Phi$ och $\Phi \models P(f(a))$, men $P(f(a)) \not\models \Phi$ och $\Phi \not\models \forall x(P(x))$. 6
Motivera varför din formel Φ har dessa egenskaper.
8. Bevisa att din formel baserad på påstående (b) i uppgift 6 på E-delen är sann i tillståndet s_0 i din modell. 6
9. På ett bord ligger en hög med svarta stenar och en annan hög med **lika många** vita stenar. Två spelare A och B spelar nu följande spel: A börjar och plockar bort ett antal stenar, minst 1 men annars så många hon vill, från **en** av högarna, vilken hon vill. Sedan är det Bs tur, och då får B plocka bort ett valfritt antal stenar från en av högarna. Sedan går turen åter över till A, osv. Den spelare som inte kan dra (eftersom bordet är tomt på stenar) förlorar. Formulera en vinnande strategi för B och bevisa med matematisk induktion att B alltid vinner om hon använder din strategi. Var noga i ditt bevis att tala om var du använder ditt induktionsantagande. 6
-

Del A

För att uppnå betyg A krävs 12 poäng, och för betyg B krävs 8 poäng på A-delen. I bägge fallen krävs även godkänt på C-delen.

10. Betrakta utsagan:

9

”2 är det enda jämna primtalet. Alltså, om x och y är två godtyckliga olika primtal så är inte både x och y jämna.”

och definitionerna:

$$\begin{array}{ll} P(x) & : \quad x \text{ är ett primtal} \\ J(x) & : \quad x \text{ är jämnt} \\ 2 & : \quad \text{talet } 2 \end{array}$$

Formulera utsagan som en predikatlogisk sekvent och bevisa denna med naturlig deduktion. Rita tydligt alla boxar för att visa räckvidden för alla antaganden och nya variabler i beviset.

11. Programmet `Square` nedan beräknar kvadraten av ett icke-negativt heltal n :

9

```
r = 0;
s = 1;
while (n!=0) {
    r = r+s;
    s = s+2;
    n = n-1;
}
```

Skriv en Hoare-triplett som specificerar programmets funktionalitet (dvs beräkna kvadrater). Visa sedan att **programmet är partiellt korrekt** relativt din specifikation. Presentera beviset som en bevistablå. Identifiera din **slinginvariant** och alla **bevisförpliktelser** och motivera varför de är sanna.
