E1 Motvaluering $\{p : T, q : F\}$: både premisser blir då sanna, medan slutsatsen blir falskt. M.v. är unikt därför att detta är den enda valueringen för vilken slutsatsen är falskt.

E2 Modell där $P(a) \land \forall x (P(x) \to P(f(x)))$ är sann:

universum: alla heltal

c : tolkas som 0

f : efterföljare-funktionen, mappar n till n+1

P : tolkas som "icke-negativ", dvs $\{0, 1, 2, \ldots\}$

Modell är formeln är falsk:

P : tolkas som "icke positiv", dvs $\{0, -1, -2, \ldots\}$

E3 Heltalslistor med BNF:

$$\text{HList} ::= \text{empty} \mid \text{cons}(\text{Heltal}, \text{HList})$$

Induktiv definition av $\underline{\text{conc}}(u, v)$:

$$\underline{\text{conc}}(\text{empty}, v) \overset{def}{=} v$$
$$\underline{\text{conc}}(\text{cons}(n, u'), v) \overset{def}{=} \text{cons}(n, \underline{\text{conc}}(u', v))$$

Induktiv definition av $\underline{\text{sum}}(u)$:

$$\underline{\text{sum}}(\text{empty}) \overset{def}{=} 0$$
$$\underline{\text{sum}}(\text{cons}(n, u')) \overset{def}{=} n + \underline{\text{sum}}(u')$$

Stegvis beräkning:

$\underline{\text{sum}}(\underline{\text{conc}}(\text{cons}(5, \text{empty}), \text{cons}(7, \text{empty})))$

$= \underline{\text{sum}}(\text{cons}(5, \underline{\text{conc}}(\text{empty}, \text{cons}(7, \text{empty}))))$ {Def $\underline{\text{conc}}$}

$= \underline{\text{sum}}(\text{cons}(5, \text{cons}(7, \text{empty})))$ {Def $\underline{\text{conc}}$}

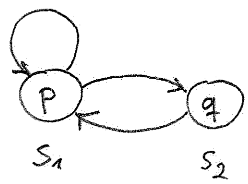
$= 5 + \underline{\text{sum}}(7, \text{empty})$ {Def $\underline{\text{sum}}$}

$= 5 + 7 + \underline{\text{sum}}(\text{empty})$ {Def $\underline{\text{sum}}$}

$= 5 + 7 + 0 = 12$ {Def sum}

E4 (a) Det är möjligt att komma till ett läge där p är sant och kan förbli sant för evigt.

(b)



Ja, $\mathcal{M}, s_1 \models EF\,EG\,p$ gäller.

Det finns en stig, t.ex. $s_1 \to s_1 \to s_1 \to \dots$ som har ett tillstånd, nämligen s_1, där $\mathcal{M}, s_1 \models EG\,p$; vilket gäller därför att det finns en stig, nämligen $s_1 \to s_1 \to s_1 \to \dots$, där p är sant i alla tillstånd, dvs i s_1.

E5 (a)

$$\left(\begin{array}{l} priceOne = p1_0 \\ \wedge\ priceTwo = p2_0 \\ \wedge\ balance = b_0 \end{array}\right) \text{ Buy } \left(\begin{array}{l} (p1_0 \le p2_0 \wedge p1_0 \le b_0 \to balance = b_0 - p1_0) \\ \wedge (p2_0 \le p1_0 \wedge p2_0 \le b_0 \to balance = b_0 - p2_0) \\ \wedge (p1_0 > b_0 \wedge p2_0 > b_0 \to balance = b_0 \end{array}\right)$$

(b)

Buy $\stackrel{def}{=}$

```
if (priceOne <= priceTwo) {
    if (priceOne <= balance) {
        balance = balance - priceOne;
    } else {
        balance = balance;
    };
} else {
    if (priceTwo <= balance) {
        balance = balance - priceTwo;
    } else {
        balance = balance;
    };
}
```

C1

Formler ekvivalenta till $p \to q$:

- $\neg p \vee q$
- $\neg q \to \neg p$
- $\neg (p \wedge \neg q)$

Lätt att motivera med sanningsvärdestabell:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$\neg q \to \neg p$	$\neg(p \wedge \neg q)$
T	T	F	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T	T

ekvivalenta!

C2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{-}{\mathcal{M}, s_1 \vdash_{[]} p}\,p \qquad \dfrac{-}{\mathcal{M}, s_1 \vdash_{[s_1]} EGp}\,EG_1}{\mathcal{M}, s_1 \vdash_{[]} EGp}\,EG_2}{\mathcal{M}, s_1 \vdash_{[s_2]} EF\, EGp}\,EF_1}{\mathcal{M}, s_2 \vdash_{[]} EF\, EGp}\,EF_2$$

$\boxed{\text{C3}}$ Låt oss förkorta priceOne med $p1$, priceTwo med $p2$ och balance med b.

$\llparenthesis p1 = p1_0 \wedge p2 = p2_0 \wedge b = b_0 \rrparenthesis$ — Pre-condition

<u>if</u> $(p1 <= p2)$ {

$\llparenthesis p1 = p1_0 \wedge p2 = p2_0 \wedge b = b_0 \wedge p1 \leq p2 \rrparenthesis$ — If

<u>if</u> $(p1 <= b)$ {

$\llparenthesis p1 = p1_0 \wedge p2 = p2_0 \wedge b = b_0 \wedge p1 \leq p2 \wedge p1 \leq b \rrparenthesis$ — If

$$\left\llparenthesis \begin{array}{l} (p1_0 \leq p2_0 \wedge p1_0 \leq b_0 \rightarrow b - p1 = b_0 - p1_0) \\ \wedge (p2_0 \leq p1_0 \wedge p2_0 \leq b_0 \rightarrow b - p1 = b_0 - p2_0) \\ \wedge (p1_0 > b_0 \wedge p2_0 > b_0 \rightarrow b - p1 = b_0) \end{array} \right\rrparenthesis \quad \text{Implied}$$

$b = b - p1;$

$$\left\llparenthesis \begin{array}{l} (p1_0 \leq p2_0 \wedge p1_0 \leq b_0 \rightarrow b = b_0 - p1_0) \\ \wedge (p2_0 \leq p1_0 \wedge p2_0 \leq b_0 \rightarrow b = b_0 - p2_0) \\ \wedge (p1_0 > b_0 \wedge p2_0 > b_0 \rightarrow b = b_0) \end{array} \right\rrparenthesis \quad \text{Assign, If}$$

} <u>else</u> {

$\llparenthesis p1 = p1_0 \wedge p2 = p2_0 \wedge b = b_0 \wedge p1 \leq p2 \wedge \neg(p1 \leq b) \rrparenthesis$ — If

$\llparenthesis$ post-condition $\rrparenthesis$ — Implied

$b = b;$

$\llparenthesis$ post-condition $\rrparenthesis$ — Assign, If

};

$\llparenthesis$ post-condition $\rrparenthesis$ — If

} <u>else</u> {

$\llparenthesis p1 = p1_0 \wedge p2 = p2_0 \wedge b = b_0 \wedge \neg(p1 \leq p2) \rrparenthesis$ — If

<u>if</u> $(p2 <= b)$ {

$\llparenthesis p1 = p1_0 \wedge p2 = p2_0 \wedge b = b_0 \wedge \neg(p1 \leq p2) \wedge p2 \leq b \rrparenthesis$ — If

$$\left\llparenthesis \begin{array}{l} (p1_0 \leq p2_0 \wedge p1_0 \leq b_0 \rightarrow b - p2 = b_0 - p1_0) \\ \wedge (p2_0 \leq p1_0 \wedge p2_0 \leq b_0 \rightarrow b - p2 = b_0 - p2_0) \\ \wedge (p1_0 > b_0 \wedge p2_0 > b_0 \rightarrow b - p2 = b_0) \end{array} \right\rrparenthesis \quad \text{Implied}$$

$b = b - p2;$

<u>etc</u> $\llparenthesis$ post-condition $\rrparenthesis$ — Assign, If

C3 (fortsättning)

Vi får 4 bevisförpliktelser:

① $\vdash p1 = p1_0 \wedge p2 = p2_0 \wedge b = b_0 \wedge p1 \leq p2 \wedge p1 \leq b \to$

$$(p1_0 \leq p2_0 \wedge p1_0 \leq b_0 \to b - p1 = b_0 - p1_0)$$
$$\wedge (p2_0 \leq p1_0 \wedge p2_0 \leq b_0 \to b - p1 = b_0 - p2_0)$$
$$\wedge (p1_0 > b_0 \wedge p2_0 > b_0 \to b - p1 = b_0)$$

Sekventen gäller därför att alla tre implikationer på höger sida är sanna när vänster sida av hela implikation är sant: första implikationen är sann då $b - p1 = b_0 - p1_0$ medförs, andra implikationen är sann då $p2_0 \leq p1_0$ medför $p2_0 = p1_0$; och tredje implikationen är sann då vänster sida blir falskt.

② $\vdash p1 = p1_0 \wedge p2 = p2_0 \wedge b = b_0 \wedge p1 \leq p2 \wedge \neg(p1 \leq b) \to$

post-condition

Sekventen gäller därför att vänstra sidan av implikationen medför $b = b_0$ så att tredje implikation blir sann, medan de första två blir sanna därför att deras vänster sida blir falskt.

③ symmetriskt med ① där p1 och p2 har omvända roller.

④ Likadant som ②.

A1 Rätt svar är (b): ϕ är satisfierbar.

Om $\phi \models \psi$ inte gäller, så finns det en modell $\mathcal{M}$ och omgivning l så att $\mathcal{M} \models_l \phi$ är sant men $\mathcal{M} \models_l \psi$ är falsk. Att $\mathcal{M} \models_l \phi$ är sannt bevittnar att ϕ är satisfierbar.

A2 Sekvent:

$$\forall x \forall y (\neg(x=y) \to M(x,y) \lor M(y,x)), \neg \exists x\, M(x,0) \vdash \forall x (\neg(x=0) \to M(0,x))$$

Bevis:

1	$\forall x \forall y (\neg(x=y) \to M(x,y) \lor M(y,x))$	premiss
2	$\neg \exists x\, M(x,0)$	premiss
3	x_0	
4	$\neg(x_0=0)$	antagande
5	$\forall y (\neg(x_0=y) \to M(x_0,y) \lor M(y,x_0))$	$\forall x$e: 1 (x_0)
6	$\neg(x_0=0) \to M(x_0,0) \lor M(0,x_0)$	$\forall y$e: 5 (0)
7	$M(x_0,0) \lor M(0,x_0)$	$\to$e: 4,6
8	$M(x_0,0)$	antagande
9	$\exists x\, M(x,0)$	$\exists x$i: 8 (x_0)
10	$\bot$	$\neg$e: 9,2
11	$M(0,x_0)$	$\bot$e: 10
12	$M(0,x_0)$	antagande
13	$M(0,x_0)$	copy: 12
14	$M(0,x_0)$	$\lor$e 7, 8-11, 12-13
15	$\neg(x_0=0) \to M(0,x_0)$	$\to$i: 4-14
16	$\forall x (\neg(x=0) \to M(0,x))$	$\forall x$i: 3-15

$\boxed{\text{A3}}$ Bevis med strukturell induktion:

- Fall $u = \mathrm{empty}$.

  Låt $v \in HList$ vara en godtycklig heltalslista. Vi har:

$$\begin{aligned}
\underline{sum}(\underline{conc}(empty, v)) &= \underline{sum}(v) && \{\text{Def. } \underline{conc}\} \\
&= 0 + \underline{sum}(v) && \{\text{Aritmetik}\} \\
&= \underline{sum}(empty) + sum(v) && \{\text{Def. } \underline{sum}\}
\end{aligned}$$

- Fall $u = cons(n, u')$ för något heltal n och någon heltalslista $u' \in HList$.

  Antag $\forall v\,(\underline{sum}(\underline{conc}(u', v)) = \underline{sum}(u') + \underline{sum}(v))$ – induktionshypotes (IH).

  Låt $v \in HList$ vara en godtycklig heltalslista. Vi har:

$$\begin{aligned}
\underline{sum}(\underline{conc}(cons(n, u'), v)) &= \underline{sum}(cons(n, \underline{conc}(u', v))) && \{\text{Def. } \underline{conc}\} \\
&= n + \underline{sum}(\underline{conc}(u', v)) && \{\text{Def } \underline{sum}\} \\
&= n + (\underline{sum}(u') + \underline{sum}(v)) && \{\text{IH}\} \\
&= (n + \underline{sum}(u')) + \underline{sum}(v) && \{\text{Aritmetik}\} \\
&= \underline{sum}(cons(n, u')) + \underline{sum}(v) && \{\text{Def. } \underline{sum}\}
\end{aligned}$$