E1

$$\neg(\neg p \vee q) \vdash p$$

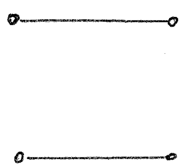
1	$\neg(\neg p \vee q)$	premiss
2	$\neg p$	antagande
3	$\neg p \vee q$	$\vee i_1$ 2
4	$\bot$	$\neg e$ 3,1
5	p	PBC 2-4

E2

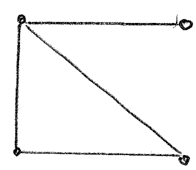
- En modell där formeln är sann vore en modell där både delformlerna är sanna. T.ex. i ett universum som består av ett konkret mängd människor, t.ex. eleverna i en klass, där varje elev har en klasskompis men ingen är kompis med alla, kommer formeln vara sann under tolkningen:

  $P(x,y)$: x är kompis med y

- Under samma tolkning kommer formeln vara falsk om varje elev i klassen har en kompis och dessutom det finns någon "poppis" som är kompis med alla



respektive



$\boxed{E3}$

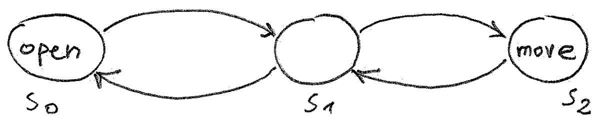
$$\underline{\text{member}}(n, \text{leaf}(m)) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} T & \text{om } n = m \\ F & \text{om } n \neq m \end{cases}$$

$$\underline{\text{member}}(n, \text{branch}(t_1, t_2)) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\text{member}}(n, t_1) \vee \underline{\text{member}}(n, t_2)$$

$$\begin{aligned} & \underline{\text{member}}(-4, \text{branch}(\text{leaf}(13), \text{branch}(\text{leaf}(-4), \text{leaf}(5)))) \\ = {} & \underline{\text{member}}(-4, \text{leaf}(13)) \vee \underline{\text{member}}(-4, \text{branch}(\text{leaf}(-4), \text{leaf}(5))) \\ = {} & F \vee \underline{\text{member}}(-4, \text{leaf}(-4)) \vee \underline{\text{member}}(-4, \text{leaf}(5)) \\ = {} & F \vee T \vee F \\ = {} & T \end{aligned}$$

$\boxed{E4}$ (a) $AG((AF\,\text{move}) \wedge (\text{move} \to \neg\text{open}))$

(b)



Formeln gäller <u>inte</u> i s_0, därför att $(AF\,\text{move}) \wedge (\text{move} \to \neg\text{open})$ inte är sann i s_0, och därmed finns en stig från s_0 (vilken som helst) som leder till ett tillstånd (nämligen s_0) där delformeln är falsk.
Delformeln $(AF\,\text{move}) \wedge (\text{move} \to \neg\text{open})$ gäller inte i s_0, därför att första konjunkten $AF\,\text{move}$ inte gäller i s_0; och detta därför att det finns en stig, nämligen

$$s_0 \to s_1 \to s_0 \to s_1 \to \dots$$

som aldrig kommer till ett tillstånd där move är sann

$\boxed{E5}$ Se uppgift 2E3 från omtentan i logik10.

C1

AF-reglerna är konstruerade enligt ekvivalensen:

$$AF\,\phi \equiv \phi \vee AX\,AF\,\phi$$

Disjunktionen hanteras med att ha två olika regler, en för varje disjunkt. Första disjunkten ger regeln AF_1, medan andra disjunkten resulterar i regeln AF_2, enligt redan befintliga reglerna för $\vee$ or AX.
I både regler tillåtas slingor inte, för att säkerställa att så småningom ϕ är sannt. Detta kollas med hjälp av listan U och sidovillkoren till reglerna.

C2

Nej, numatoms(ϕ) går <u>inte</u> att definieras med strukturell induktion, därför att antalet av olika atomer i en formel som t.ex. $\phi_1 \wedge \phi_2$ inte kan beräknas <u>bara</u> utifrån antalet olika atomer i ϕ_1 och ϕ_2, därför att de kan ha gemensama atomer.

C3

$$\frac{(\!|\phi \wedge B|\!)\ C\ (\!|\psi|\!) \qquad \vdash_{AR} \phi \wedge \neg B \to \psi}{(\!|\phi|\!)\ \underline{\text{if}}\ B\ \{C\}\ (\!|\psi|\!)}$$

Regeln motiveras med att betrakta de två fallen av hur sling-guarden B utvärderar i en tillstånd s där förvillkoret ϕ är sannt:

- om B är sann i s och exekveringen av C från s terminerar, så kommer eftervillkoret ψ vara sannt enligt första premissen i regeln;
- om B är falskt kommer slingan terminera i samma tillstånd s, och där är eftervillkoret ψ sannt enligt andra premissen i regeln.

A1

Om en sekvent kan bevisas i bevissystemet S, så kan den uppenbarligen också bevisas i S', fast inte nödvändigtvis tvärtom. Så måste det vara att:

- om S' är sund så är S också sund, och
- om S är fullständig så är S' också fullständig.

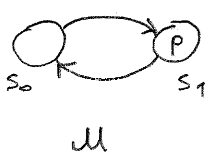
Därmed är alla listade situationer möjliga förutom (c) och (f).

A2

```
Sekvent:

AxAyAz(P(x,y,z)/\U(y)/\U(z) -> U(x)),
AxAyAz(P(x,y,z)/\-U(y)) -> -U(x),
AxAyAz(P(x,y,z)/\-U(z)) -> -U(x)
|- AxAyAz(P(x,y,z)/\U(x) -> U(y)/\U(z)

Bevis:

 1. AxAyAz(P(x,y,z)/\U(y)/\U(z) -> U(x))       Premiss
 2. AxAyAz(P(x,y,z)/\-U(y)) -> -U(x)            Premiss
 3. AxAyAz(P(x,y,z)/\-U(z)) -> -U(x)            Premiss
    ---------------------------------------------------
 4. | x0 y0 z0:                                       |
    | ----------------------------------------------  |
 5. || P(x0,y0,z0)/\U(y0)/\U(z0) -> U(x0))     Ae 4  ||
    || -------------------------------------------   ||
 6. ||| P(x0,y0,z0) /\ U(x0)             Antagande  |||
 7. ||| P(x0,y0,z0)                         /\e1 6  |||
 8. ||| U(x0)                               /\e2 6  |||
    ||| ----------------------------------------    |||
 9. |||| -U(y0)                          Antagande ||||
10. |||| P(x0,y0,z0) /\ -U(y0)              /\i 6,9 ||||
11. |||| -U(x)                             ->e 10,2 ||||
12. |||| bottom                          not-e 8,11 ||||
    ||| ----------------------------------------    |||
13. ||| U(y0)                           PBC 8,9-12   |||
    ||| ----------------------------------------    |||
14. |||| -U(z0)                          Antagande ||||
15. |||| P(x0,y0,z0) /\ -U(z0)             /\i 6,14 ||||
16. |||| -U(x)                             ->e 15,3 ||||
17. |||| bottom                          not-e 8,16 ||||
    ||| ----------------------------------------    |||
18. ||| U(z0)                          PBC 13,14-17  |||
19. ||| U(y0) /\ U(z0)                     /\i 13,18 |||
    || -------------------------------------------   ||
20. | P(x0,y0,z0)/\U(x0) -> U(y0)/\U(z0)   ->i 6-19   |
    ---------------------------------------------------
21. AxAyAz(P(x,y,z)/\U(x) -> U(y)/\U(z)      Ai 4-20
```

A3

Formlerna är <u>inte</u> ekvivalenta: t.ex. i tillståndet s_0



i övergånssystemet $\mathcal{M}$ till vänster är $AF\,AG\,p$ falskt medan $AG\,AF\,p$ sannt, som kan motiveras som i uppgift E4.