DD1350 Logik för dataloger

Lösningsförslag till tentamen
12 januari 2015

Johan Boye
KTH CSC

Del E

1. Bevis:

1	$((p \to \neg q) \to r) \to \neg p$	Premiss
2	p	Antagande
3	$\neg q$	Antagande
4	r	Antagande
5	$p \to \neg q$	Antagande
6	r	Copy 4
7	$(p \to \neg q) \to r$	$\to i$, 5-6
8	$\neg p$	$\to e$, 7,1
9	$r \to \neg p$	$\to i$, 4-8
10	$\neg q \to (r \to \neg p)$	$\to i$, 3-9
11	$p \to (\neg q \to (r \to \neg p))$	$\to i$, 2-10

2. Meningen kan uttryckas som $\neg s \to \neg t$, eller ekvivalent $s \vee \neg t$. Negationen blir då $\neg(s \vee \neg t)$, eller ekvivalent $\neg s \wedge t$, dvs *"Solen skiner inte och mina tomater kommer att mogna"*.

3. Beviset är **inkorrekt**. I elimineringen av existenskvantifieraren (rad 4-5) ska en ny, oanvänd variabel användas, men här används x_0 som redan förekommer på rad 2.

4. T.ex. $\exists x \exists y(\neg(x = y))$

5. Alternativ (e) är rätt. Annas påstående är en konsekvens av predikatlogikens sundhet och alltså korrekt. Beatas påstående är felaktigt; t.ex. kan man inte bevisa vare sig $\vdash \forall x(P(x))$ eller $\vdash \neg\forall x(P(x))$.

6. Egenskap (a): $\mathsf{AG}\,\neg(lock_A \wedge lock_B)$, egenskap (b): $\mathsf{AG}\,\mathsf{EF}\,lock_A$, egenskap (c): $\mathsf{AG}\,\mathsf{EF}\,lock_B$, egenskap (d): $\mathsf{AG}\,\mathsf{EF}\,\neg(lock_A \vee lock_B)$.

   Låt $\mathcal{M} = (S, \to, L)$, där $S = \{s_0, s_1, s_2\}$, $\to = \{(s_0, s_1), (s_1, s_0), (s_0, s_2), (s_2, s_0)\}$, och $L(s_0) = \{\}$, $L(s_1) = \{lock_A\}$ och $L(s_2) = \{lock_B\}$.

Del C

7. Låt Φ vara formeln $\forall x(P(f(x)))$.

   - Då gäller att $\forall x(P(x)) \models \Phi$. Om alla element $b^{\mathcal{M}}$ i modellen $\mathcal{M}$s universum A har egenskapen $P^{\mathcal{M}}$, då har även $f^{\mathcal{M}}(b^{\mathcal{M}})$ samma egenskap, eftersom $f^{\mathcal{M}}(b^{\mathcal{M}})$ också är ett element i A.
   - Det gäller att $\Phi \models P(f(a))$, eftersom om $f^{\mathcal{M}}(b^{\mathcal{M}})$ har egenskapen $P^{\mathcal{M}}$ för alla $b^{\mathcal{M}} \in A$, så gäller detta speciellt $a^{\mathcal{M}}$.
   - Det gäller att $P(f(a)) \not\models \Phi$. Om vi t.ex. betraktar mängden av alla naturliga tal, låter P vara egenskapen "udda", $f(x)$ vara funktionen $x+1$, och a vara talet 0, så är $P(f(a))$ sann i denna modell, men Φ falsk.
   - Det gäller att $\Phi \not\models \forall x(P(x))$. Om vi igen betraktar mängden av alla naturliga tal, låter P vara egenskapen "jämn", och $f(x)$ vara funktionen $x \times 2$, så är Φ sann i denna modell, men $\forall x(P(x))$ falsk.

8. Bevisträd:

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{-}{\mathcal{M}, s_1 \vdash_{[]} \mathit{lock}_A}\,p}{\mathcal{M}, s_1 \vdash_{[s_0]} \mathsf{EF}\,\mathit{lock}_A}\,\mathsf{EF}_1}{\mathcal{M}, s_0 \vdash_{[]} \mathsf{EF}\,\mathit{lock}_A}\,\mathsf{EF}_2
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{-}{\mathcal{M}, s_1 \vdash_{[]} \mathit{lock}_A}\,p}{\mathcal{M}, s_1 \vdash_{[]} \mathsf{EF}\,\mathit{lock}_A}\,\mathsf{EF}_1
\quad
\dfrac{-}{\mathcal{M}, s_0 \vdash_{[s_0,s_1]} \mathsf{AG}\,\mathsf{EF}\,\mathit{lock}_A}\,\mathsf{AG}_1}{\mathcal{M}, s_1 \vdash_{[s_0]} \mathsf{AG}\,\mathsf{EF}\,\mathit{lock}_A}\,\mathsf{AG}_2
\qquad T
}{\mathcal{M}, s_0 \vdash_{[]} \mathsf{AG}\,\mathsf{EF}\,\mathit{lock}_A}\,\mathsf{AG}_2
$$

där T är trädet:

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{-}{\mathcal{M}, s_1 \vdash_{[]} \mathit{lock}_A}\,p}{\mathcal{M}, s_1 \vdash_{[s_0,s_2]} \mathsf{EF}\,\mathit{lock}_A}\,\mathsf{EF}_1}{\mathcal{M}, s_0 \vdash_{[s_2]} \mathsf{EF}\,\mathit{lock}_A}\,\mathsf{EF}_2}{\mathcal{M}, s_2 \vdash_{[]} \mathsf{EF}\,\mathit{lock}_A}\,\mathsf{EF}_2
\qquad
\dfrac{-}{\mathcal{M}, s_0 \vdash_{[s_0,s_2]} \mathsf{AG}\,\mathsf{EF}\,\mathit{lock}_A}\,\mathsf{AG}_1
}{\mathcal{M}, s_2 \vdash_{[s_0]} \mathsf{AG}\,\mathsf{EF}\,\mathit{lock}_A}\,\mathsf{AG}_2
$$

9. Strategin B bör använda är följande: Om det är olika antal stenar i högarna, plocka bort stenar från den största högen så att högarna blir lika stora. Vi definierar $P(n)$ att vara utsagan *"B kan vinna om A börjar spelet när det finns n stenar i vardera högen"*. Vi bevisar $P(n)$ med matematisk induktion över n:

   Basfall: $n = 0$. Eftersom bägge högarna är tomma kan A inte dra, och har förlorat enligt reglerna.

   Induktionshypotes: $P(j)$ är sann för $0 \leq j < k$.

   Induktionssteg: Vi vill visa $P(k)$. Antag att det finns k stenar i vardera högen. A plockar i st stenar från ena högen, $1 \leq i \leq k$. B plockar då lika många stenar från den andra högen. Det finns nu $k - i$ stenar i varje hög, och eftersom $k - i < k$ så gäller $P(k - i)$ enligt induktionshypotesen, dvs B kan vinna från detta tillstånd. Alltså kan B vinna när det finns k stenar i varje hög, dvs $P(k)$ är sant.

Del A

10. Sekvent: $\forall x(J(x) \land P(x) \to 2 = x) \vdash \forall x \forall y((P(x) \land P(y)) \land \neg(x = y) \to \neg(J(x) \land J(y)))$

Bevis:

1	$\forall x(J(x) \land P(x) \to 2 = x)$	Premiss
2	x_0	
3	y_0	
4	$(P(x_0) \land P(y_0)) \land \neg(x_0 = y_0)$	Antagande
5	$P(x_0) \land P(y_0)$	$\land e_1$ 4
6	$P(x_0)$	$\land e_1$ 5
7	$P(y_0)$	$\land e_2$ 5
8	$\neg(x_0 = y_0)$	$\land e_2$ 4
9	$J(x_0) \land J(y_0)$	Antagande
10	$J(x_0)$	$\land e_1$ 9
11	$J(y_0)$	$\land e_2$ 9
12	$J(x_0) \land P(x_0)$	$\land$ i 10,6
13	$J(x_0) \land P(x_0) \to 2 = x_0$	$\forall$ e 1
14	$2 = x_0$	$\to$ e 12,13
15	$J(y_0) \land P(y_0)$	$\land$ i 11,7
16	$J(y_0) \land P(y_0) \to 2 = y_0$	$\forall$ e 1
17	$2 = y_0$	$\to$ e 15,16
18	$x_0 = y_0$	$=$ e 14,17
19	$\perp$	$\neg$ e 18,8
20	$\neg(J(x_0) \land J(y_0))$	$\neg$ i 9-19
21	$(P(x_0) \land P(y_0)) \land \neg(x_0 = y_0) \to \neg(J(x_0) \land J(y_0))$	$\to$ i 4-20
22	$\forall y((P(x_0) \land P(y)) \land \neg(x_0 = y) \to \neg(J(x_0) \land J(y)))$	$\forall y$ i 3-21
23	$\forall x \forall y((P(x) \land P(y)) \land \neg(x = y) \to \neg(J(x) \land J(y)))$	$\forall x$ i 2-22

11. Hoare-trippel: $(\!| n = n_0 \ \wedge\ n \geq 0 |\!)$ Square $(\!| r = n_0^2 |\!)$

Slinginvariant: $r = \sum_{i=1}^{(n_0-n)}(2i-1) \ \wedge\ s = 2(n_0-n)+1$

Bevistablå:

$(\!| n = n_0 \ \wedge\ n \geq 0 |\!)$
$(\!| 0 = \sum_{i=1}^{(n_0-n)}(2i-1) \ \wedge\ 1 = 2(n_0-n)+1 |\!)$
`r = 0;`
$(\!| r = \sum_{i=1}^{(n_0-n)}(2i-1) \ \wedge\ 1 = 2(n_0-n)+1 |\!)$
`s = 1;`
$(\!| r = \sum_{i=1}^{(n_0-n)}(2i-1) \ \wedge\ s = 2(n_0-n)+1 |\!)$
`while (n != 0) {`
$(\!| r = \sum_{i=1}^{(n_0-n)}(2i-1) \ \wedge\ s = 2(n_0-n)+1 \ \wedge\ n \neq 0 |\!)$
$(\!| r + s = \sum_{i=1}^{(n_0-n+1)}(2i-1) \ \wedge\ s+2 = 2(n_0-n+1)+1 |\!)$
`r = r + s;`
$(\!| r = \sum_{i=1}^{(n_0-n+1)}(2i-1) \ \wedge\ s+2 = 2(n_0-n+1)+1 |\!)$
`s = s + 2;`
$(\!| r = \sum_{i=1}^{(n_0-n+1)}(2i-1) \ \wedge\ s = 2(n_0-n+1)+1 |\!)$
`n = n - 1;`
$(\!| r = \sum_{i=1}^{(n_0-n)}(2i-1) \ \wedge\ s = 2(n_0-n)+1 |\!)$
`}`
$(\!| r = \sum_{i=1}^{(n_0-n)}(2i-1) \ \wedge\ s = 2(n_0-n)+1 \ \wedge\ \neg(n \neq 0) |\!)$
$(\!| r = n_0^2 |\!)$

3 st bevisförpliktelser:

- $n = n_0 \ \wedge\ n \geq 0 \ \rightarrow\ 0 = \sum_{i=1}^{(n_0-n)}(2i-1) \ \wedge\ 1 = 2(n_0-n)+1$
  Eftersom $n_0 - n = 0$ är formlerna i högerledet sanna: En summa från 1 till 0 är alltid 0, och den andra ekvationen förenklas till $1 = 1$.

- $r = \sum_{i=1}^{(n_0-n)}(2i-1) \ \wedge\ s = 2(n_0-n)+1 \ \wedge\ n \neq 0 \ \rightarrow\ r + s = \sum_{i=1}^{(n_0-n+1)}(2i-1) \ \wedge\ s+2 = 2(n_0-n+1)+1$.

  Utveckla summan i högerledet av implikationen:
  $\sum_{i=1}^{(n_0-n+1)}(2i-1) = \sum_{i=1}^{(n_0-n)}(2i-1) + 2(n_0-n)+1$, vilket är precis summan av r och s från vänsterledet.

  Den sista ekvationen förenklas till $s = 2(n_0-n)+1$, vilken återfinns i vänsterledet av implikationen.

- $r = \sum_{i=1}^{(n_0-n)}(2i-1) \ \wedge\ s = 2(n_0-n)+1 \ \wedge\ \neg(n \neq 0) \ \rightarrow\ r = n_0^2$
  vilket kan förenklas till
  $r = \sum_{i=1}^{n_0}(2i-1) \ \wedge\ s = 2(n_0)+1 \ \rightarrow\ r = n_0^2$
  Att summan av de första n_0 udda talen är lika med n_0^2 kan bevisas med induktion (vilket vi gjorde på en föreläsning).