DD1350 Logik för dataloger

Lösningsförslag till omtentamen
8 april 2015

Johan Boye
KTH CSC

1. Bevis:

1	$p \wedge (q \vee \neg r)$	Premiss
2	p	$\wedge e_1$ 1
3	$q \vee \neg r$	$\wedge e_2$ 1
4	q	Antagande
5	$p \wedge q$	$\wedge i$ 2,4
6	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)$	$\vee i_1$ 5
7	$\neg r$	Antagande
8	$p \wedge \neg r$	$\wedge i$ 2,7
9	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)$	$\vee i_2$ 8
10	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)$	$\vee e$ 3, 4-6, 7-9

2. Alternativ (d) är korrekt. Negationen kan uttryckas *"Vissa elever i klassen hade mindre än 20 poäng på tentan"*.

3. "Vart och ett av de tre breven ligger i exakt en (1) brevlåda":

$$\begin{array}{l} ((p_{11} \wedge \neg p_{12}) \ \vee \ (\neg p_{11} \wedge p_{12})) \wedge \\ ((p_{21} \wedge \neg p_{22}) \ \vee \ (\neg p_{21} \wedge p_{22})) \wedge \\ ((p_{31} \wedge \neg p_{32}) \ \vee \ (\neg p_{31} \wedge p_{32})) \end{array}$$

"Minst en av de två brevlådorna innehåller minst två brev":

$$\begin{array}{l} (p_{11} \wedge p_{21}) \ \vee \ (p_{11} \wedge p_{31}) \ \vee \ (p_{21} \wedge p_{31}) \vee \\ (p_{12} \wedge p_{22}) \ \vee \ (p_{12} \wedge p_{32}) \ \vee \ (p_{22} \wedge p_{32}) \end{array}$$

4. P är **inte** partiellt korrekt relativt specifikationen (a) eftersom x alltid är 0 när programmet terminerar. P är däremot partiellt korrekt relativt specifikationen (b). Att programmet inte terminerar för $x < 0$ gör ingenting (vi är ju intresserade av **partiell** korrekthet).

5. $\forall x(Q(x))$ är **inte** en logisk konsekvens av $\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge P(a)$. Betrakta t.ex. modellen vars universum är alla naturliga tal, och där vi tolkar symbolerna så här:

$P(x)$	:	x är jämnt delbart med 4
$Q(x)$	:	x är jämnt delbart med 2
a	:	talet 4

I denna modell är premisserna sanna men slutsatsen falsk, vilken visar att slutsatsen inte är en logisk konsekvens av premisserna.

6. (a) T.ex. $\mathsf{AF}\ \mathsf{AG}\ \neg\mathsf{enter}$
(b) Formeln är sann i tillståndet s_0. Man kan lätt se att $\mathsf{AG}\neg\mathsf{enter}$ är sann i både s_1 och s_3 eftersom exekveringen loopar i dessa tillstånd med enter falsk. Eftersom exekveringen alltid kommer att hamna antingen i s_1 eller s_3 måste $\mathsf{AF}\ \mathsf{AG}\ \neg\mathsf{enter}$ vara sann i alla tillstånd.

7. (a) T.ex. $\mathcal{M} = (S, \rightarrow, L)$, där $S = \{s_0, s_1\}$, $\rightarrow = \{(s_0, s_1), (s_1, s_0)\}$ och $L(s_0) = \{\}, L(s_1) = \{p\}$.

   (b) T.ex. $\mathcal{M} = (S, \rightarrow, L)$, där $S = \{s_0, s_1, s_2\}$, $\rightarrow = \{(s_0, s_1), (s_1, s_1), (s_2, s_2)\}$ och $L(s_0) = L(s_2) = \{\}, L(s_1) = \{p\}$.

8. Uppgiften är något underspecificerad, men för att formeln ska säga något intressant antar vi att i, j, k alla är heltal. Om vi dessutom antar att i, j, k är *positiva* heltal, så är den mest kompakta beskrivningen "n är en 2-potens". Om vi inte antar att de är positiva, så duger "n är en 2-potens eller en 2-potens gånger minus ett". Bägge dessa svar ger full poäng, liksom ekvivalenta beskrivningar som "Alla icke-triviala delare till n är jämnt delbara med 2" och liknande. Delvis rätta svar (t.ex. att n är ett jämnt tal) ger poäng men inte full poäng.

9. Sekvent: $\forall x(G(x) \vee S(x)) \vdash \exists x(G(x)) \vee \forall x(S(x))$

   Bevis:

1	$\forall x(G(x) \vee S(x))$	Premiss
2	$\exists x(G(x)) \vee \neg\exists x(G(x))$	LEM
3	$\exists x(G(x))$	Antagande
4	$\exists x(G(x)) \vee \forall x(S(x))$	$\vee i_1$ 3
5	$\neg\exists x(G(x))$	Antagande
6	x_0	
7	$G(x_0) \vee S(x_0)$	$\forall x e$ 1
8	$G(x_0)$	Antagande
9	$\exists x(G(x))$	$\exists i$ 8
10	$\perp$	$\neg e$ 9,5
11	$S(x_0)$	$\perp e$ 10
12	$S(x_0)$	Antagande
13	$S(x_0)$	Copy 12
14	$S(x_0)$	$\vee e$ 7,8-11,12-13
15	$\forall x(S(x))$	$\forall i$ 6-14
16	$\exists x(G(x)) \vee \forall x(S(x))$	$\vee i_2$ 15
17	$\exists x(G(x)) \vee \forall x(S(x))$	$\vee e$ 2, 3-4, 5-16

10. Bevis genom stark induktion över längden n på naturlig-deduktionsbeviset. Låt $P(n)$ vara utsagan *"Formeln på rad n är en logisk konsekvens av premisserna i beviset"*.

    Basfall $n = 1$: Beviset innehåller bara 1 rad, som då måste vara en premiss, vilket gör $P(1)$ trivialt sann.

    Induktionshypotes: Antag $P(j)$, för alla j, $1 \leq j < k$.

    Induktionssteg: Vi vill nu visa $P(k)$. Betrakta ett bevis med k rader. Antingen är sista raden en premiss (och då gäller $P(k)$ trivialt), eller också är formeln på rad k resultatet av att applicera någon regel. Vi tar exemplet $\wedge i$ (övriga regler är liknande). Då har formeln på rad k formen $\phi \wedge \psi$ där ϕ och ψ finns på radnummer $< k$. Vi vill nu visa att $\phi \wedge \psi$ är en logisk konsekvens av premisserna. Enligt induktionsantagandet är både ϕ och ψ logiska konsekvenser av premisserna i beviset (eftersom de finns på radnummer $< k$), så pga transitivitet hos logisk konsekvens återstår det bara att visa att $\phi \wedge \psi$ är en logisk konsekvens av ϕ och ψ. Detta visas lätt genom att rita upp sanningstabellen och konstatera att $\phi \wedge \psi$ är sann på alla rader där både ϕ och ψ är sanna:

	ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
	F	F	F
	F	T	F
	T	F	F
$\rightarrow$	T	T	T

Därmed har vi visat att $\phi \wedge \psi$ är en logisk konsekvens av premisserna i beviset. Vi kan göra ett liknande resonemang för de övriga reglerna (vi utelämnar detaljerna här), och visar därmed att $P(k)$ är sann i alla möjliga situationer. Bassteget och induktionssteget ger tillsammans $P(n)$ är sann för alla $n \geq 0$.

Notera att beviset ovan inte fungerar för bevis som innehåller boxar (varför?).

11. Genom att provköra algoritmen på små värden inser man att talföljden (värdena på curr i programmet) följer detta mönster:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
curr	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	...
prev	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1	...

En bra invariant är då formeln Φ:

$$(\mathsf{curr}=0 \wedge \mathsf{prev}=1) \vee (\mathsf{curr}=0 \wedge \mathsf{prev}=-1) \vee (\mathsf{curr}=1 \wedge \mathsf{prev}=0) \vee$$
$$(\mathsf{curr}=1 \wedge \mathsf{prev}=1) \vee (\mathsf{curr}=-1 \wedge \mathsf{prev}=0) \vee (\mathsf{curr}=-1 \wedge \mathsf{prev}=-1)$$

dvs alla kombinationer är tillåtna utom $\mathsf{curr}=1 \wedge \mathsf{prev}=-1$ och $\mathsf{curr}=-1 \wedge \mathsf{prev}=1$ (det är detta som gör att talföljden aldrig avlägsnar sig från värdena $-1, 0$ och 1) och $\mathsf{curr}=0 \wedge \mathsf{prev}=0$. Bevistablån blir då:

$(\!| n > 0 |\!)$
$(\!| \Phi[1/curr][0/prev] |\!)$
$\underline{\texttt{prev} = \texttt{0;}}$
$(\!| \Phi[1/curr] |\!)$
$\underline{\texttt{curr} = \texttt{1;}}$
$(\!| \Phi |\!)$
$\underline{\texttt{while (n!= 0) \{}}$
$\quad (\!| \Phi \wedge n \neq 0 |\!)$
$\quad (\!| \Phi[n-1/n][temp/prev][curr-prev/curr][curr/temp] |\!)$
$\quad \underline{\texttt{temp} = \texttt{curr;}}$
$\quad (\!| \Phi[n-1/n][temp/prev][curr-prev/curr] |\!)$
$\quad \underline{\texttt{curr} = \texttt{curr} - \texttt{prev;}}$
$\quad (\!| \Phi[n-1/n][temp/prev] |\!)$
$\quad \underline{\texttt{prev} = \texttt{temp;}}$
$\quad (\!| \Phi[n-1/n] |\!)$
$\quad \underline{\texttt{n} = \texttt{n} - \texttt{1;}}$
$\quad (\!| \Phi |\!)$
$\underline{\}}$
$(\!| \Phi \wedge \neg(n \neq 0) |\!)$
$(\!| curr < 2 |\!)$

3 st bevisförpliktelser:

- $n > 0 \ \rightarrow\ \Phi[1/\mathsf{curr}][0/\mathsf{prev}]$
  Trivialt sant eftersom $\Phi[1/\mathsf{curr}][0/\mathsf{prev}]$ är formeln

  $$(1 = 0 \wedge 0 = 1) \vee (1 = 0 \wedge 0 = -1) \vee \mathbf{(1 = 1 \wedge 0 = 0)} \vee$$
  $$(1 = 1 \wedge 0 = 1) \vee (1 = -1 \wedge 0 = 0) \vee (1 = -1 \wedge 0 = -1)$$

  vilken alltid är sann eftersom den markerade disjunkten (i fetstil) alltid är sann.

- $\Phi \wedge n \neq 0 \ \rightarrow\ \Phi[n-1/n][\mathsf{temp}/\mathsf{prev}][\mathsf{curr} - \mathsf{prev}/\mathsf{curr}][\mathsf{curr}/\mathsf{temp}]$.
  Om man utför alla substitutionerna i $\Phi[n-1/n][\mathsf{temp}/\mathsf{prev}][\mathsf{curr} - \mathsf{prev}/\mathsf{curr}][\mathsf{curr}/\mathsf{temp}]$ får man:

  $$(\mathsf{curr\text{-}prev}= 0 \wedge \mathsf{prev}= 1) \vee (\mathsf{curr\text{-}prev}= 0 \wedge \mathsf{prev}= -1) \vee (\mathsf{curr\text{-}prev}= 1 \wedge \mathsf{prev}= 0) \vee$$
  $$(\mathsf{curr\text{-}prev}= 1 \wedge \mathsf{prev}= 1) \vee (\mathsf{curr\text{-}prev}= -1 \wedge \mathsf{prev}= 0) \vee (\mathsf{curr\text{-}prev}= -1 \wedge \mathsf{prev}= -1)$$

  Man kan sedan med en fall-analys konstatera att varje disjunkt i Φ implicerar en av disjunkterna i ovanstående formel. Alltså är implikationen sann.

- $\Phi \wedge \neg(n \neq 0) \ \rightarrow\ \mathsf{curr} < 2$
  Varje disjunkt i Φ innehåller något av villkoren $\mathsf{curr}= 1$, $\mathsf{curr}= 0$ eller $\mathsf{curr}= -1$. Samtliga dessa villkor implicierar $\mathsf{curr}< 2$, vilket innebär att Φ implicerar $\mathsf{curr}< 2$.