

DD1350 Logik för dataloger

OMTENTAMEN

8 april 2015, 08.00 - 13.00

Johan Boye

KTH CSC

Skriv varje problem på ett separat blad. Skriv ditt namn på alla blad. Flera formelblad är bifogade; inga andra hjälpmedel är tillåtna.

Del E

Om du fick minst betyg E på kontrollskrivningen i oktober 2014 kan du hoppa över första uppgiften, som då redan är godkänd. För att uppnå betyg E krävs 16 poäng på E-delen, inklusive tillgodoräknade bonuspoäng från hemtal och labbar. För betyg Fx krävs minst 1 poäng på varje E-uppgift, och 15 poäng sammanlagt på E-delen.

1. Bevisa följande sekvent med naturlig deduktion: 4

$$p \wedge (q \vee \neg r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)$$

Rita tydligt alla boxar för att visa räckvidden för alla antaganden i beviset.

2. Betrakta påståendet "*Ingen i klassen hade mindre än 20 poäng på tentan*". Vilket av nedanstående påståenden uttrycker **negationen** till detta påstående? 2

- (a) "*Ingen i klassen hade mer eller lika med 20p på tentan.*"
- (b) "*Alla i klassen hade mer eller lika med 20p på tentan*"
- (c) "*Alla i klassen hade mindre än 20p på tentan.*"
- (d) Inget av påståendena a-c.

3. Brevbäraren har just delat ut tre brev i den lilla byn Tåträngslet, där det bara finns två brevlådor. 4

- (a) Uppenbarligen gäller nu att *vart och ett av de tre breven ligger i exakt en (1) brevlåda*. Formulera detta påstående som en **satslogisk** formel. Använd (bara) de satslogiska variablerna

p_{ij} – brev i ligger i brevlåda j
för $1 \leq i \leq 3$ och $1 \leq j \leq 2$ (samt parenteser och logiska konnektiv).

- (b) Det gäller även att *minst en av de två brevlådorna innehåller minst två brev*. Formulera även detta påstående som en satslogisk formel. Använd samma variabler som ovan.

4. Betrakta programmet P: 4

```
y=0;
while (x!=0) {
  x=x-1;
  y=y+1;
}
```

Bestäm för var och en av de nedanstående specifikationerna huruvida P är partiellt korrekt relativt specifikationen. **Motivera kort dina ställningstaganden.** (Formellt bevis krävs inte).

- (a) $\langle x \geq 0 \rangle \text{ P } \langle y = x \rangle$
- (b) $\langle x = x_0 \rangle \text{ P } \langle y = x_0 \rangle$

5. Är $\forall x(Q(x))$ en logisk konsekvens av $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(a)$? Motivera ditt svar! 4

6. En viktig komponent i t.ex. bankomatsystemet är att man bara får ett visst antal försök att slå in sin PIN-kod. Om man slår in fel kod för många gånger spärras kortet och blir oanvändbart. Om man skriver in rätt kod vid något försök så blir man inloggad och kan utföra sina ärenden. Alltså är bankomatsystemet konstruerat så att följande egenskap P gäller: “Användaren kan bara skriva in sin PIN-kod ett ändligt antal gånger.” 6

(a) Formulera egenskapen P ovan som en temporallogisk formel. Använd bara atomer ur mängden $Atoms = \{\text{enter}, \text{verified}\}$, där **enter** betyder “användaren kan skriva in sin PIN-kod”, och **verified** betyder “användaren är inloggad”.

(b) Betrakta modellen $\mathcal{M}$ definierad

$$\begin{aligned} S &\stackrel{\text{def}}{=} \{s_0, s_1, s_2, s_3\} \\ \rightarrow &\stackrel{\text{def}}{=} \{(s_0, s_1), (s_1, s_1), (s_0, s_2), (s_2, s_3), (s_3, s_3)\} \\ L &: s_0 \mapsto \{\text{enter}\} \quad s_1 \mapsto \{\text{verified}\}, \quad s_2 \mapsto \{\text{enter}\}, \quad s_3 \mapsto \{\} \end{aligned}$$

Är din formel i uppgift (a) sann i tillståndet s_0 i modellen $\mathcal{M}$? Motivera ditt svar!

Del C

Om du fick betyg C på kontrollskrivningen i oktober 2014 kan du hoppa över första uppgiften, som då redan är godkänd. För att uppnå betyg C krävs 12 poäng, och för betyg D krävs 8 poäng på C-delen. I bägge fallen krävs även godkänt på E-delen.

7. Betrakta de temporallogiska formlerna $\text{AG EF } p$ och $\text{EF AG } p$. 4

(a) Konstruera en modell $\mathcal{M}$ med ett tillstånd s_0 i vilket $\text{AG EF } p$ är sann och $\text{EF AG } p$ är falsk, eller förklara varför ingen sådan modell existerar.

(b) Konstruera en modell $\mathcal{M}$ med ett tillstånd s_0 i vilket $\text{AG EF } p$ är falsk och $\text{EF AG } p$ är sann, eller förklara varför ingen sådan modell existerar.

8. Följande formel uttrycker ett påstående om heltalet n , om vi ger $+$, $\times$ och $>$ sina vanliga tolkningar som addition, multiplikation respektive “större än”: 4

$$\forall i \forall j (i > 1 \wedge n = i \times j \rightarrow \exists k (i = 2 \times k))$$

Vilket påstående då? Svara med en korrekt svensk mening med maximalt 10 ord.

9. Betrakta följande resonemang i naturligt språk: 8

Svenska hockeylandslagens hemmamatcher spelas i Globen eller i Scandinavium. Alltså spelas minst en hemmamatch i Globen eller också spelas alla hemmamatcher i Scandinavium.

och definitionerna:

$$\begin{aligned} G(x) &: \text{matchen } x \text{ spelas på Globen} \\ S(x) &: \text{matchen } x \text{ spelas på Scandinavium} \end{aligned}$$

(a) Formalisera resonemanget i form av en predikatlogisk sekvent.

(b) Presentera ett bevis i naturligt deduktion till sekventen. Rita tydligt alla boxar för att visa räckvidden för alla antaganden och nya variabler i beviset.

Del A

För att uppnå betyg A krävs 12 poäng, och för betyg B krävs 8 poäng på A-delen. I bägge fallen krävs även godkänt på C-delen.

10. Betrakta alla satslogiska bevis i naturlig deduktion som **inte** använder sig av boxar (dvs som **inte** använder någon av reglerna $\forall e$, $\neg i$, $\neg e$ eller PBC). Bevisa med matematisk induktion över längden av ett bevis att slutsatsen (sista raden) är en logisk konsekvens av de premisser som förekommer i beviset. Visa tydligt var i ditt resonemang du använder ditt induktionsantagande. 9
11. Programmet P nedan beräknar det n -te elementet i en talföljd som inleds med 0 och 1, och där varje senare tal är definierat som differensen av de två föregående talen: 9

```
prev=0;
curr=1;
while (n!=0) {
    temp=curr;
    curr=curr-prev;
    prev=temp;
    n=n-1;
}
```

Bevisa Hoare-tripletten $\langle n > 0 \rangle \text{ P } \langle curr < 2 \rangle$. Presentera beviset i tablåform. Identifiera din sling-invariant och alla bevisförpliktelser och motivera varför de är sanna.
