

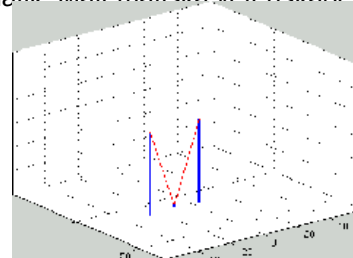
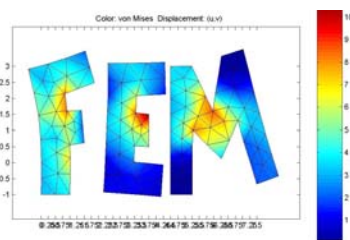
Beräkningsinriktad matematikutbildning för maskinteknikprogrammet på Chalmers



Mikael Enelund, programansvarig Maskinteknik

Håkan Johansson, kursansvarig programmering, Tillämpad mekanik

Stig Larsson, kursansvarig Matematik, Matematiska vetenskaper



[TOUT, YOUT] = ODE23(ODEFUN, TSPAN, YO)

Bakgrund

- Historisk dåliga på att dra nytta av de nya möjligheter som datorutvecklingen lett till för undervisning och ingenjörarbete
- CDIO - omsätta färdigheter och kunskaper i praktiken, lösa hela problem; från problemformuleringen till simulering, prototyp/modell och utvärdering etc. Fysiskt prototypplabb vanliga idag.
- Behov av virtuellt prototypplabb dvs: Behov av ingenjörsvärktyg för beräkning och simulering.
- Förbereda studenter för ett modernt arbetssätt baserat på modellering, simuleringen och analys
- Finita elementmetoden är ett generellt ingenjörsvärktyg för att lösa partiella differentialekvationer. Används i allt konstruktionsarbete. Undervisas normalt i fortsättningskurser
- Simuleringsinriktad M-matematikutbildning implementerad 07/08

Hörnstenar i den reformerade matematikutb.

- ✓ Tydliggöra numeriska beräkningar och simuleringar. Lösa realistiska problem. Entusiasmera och motivera
- ✓ Fullständig integration av symbolisk och numerisk analys
- ✓ Generella ekvationer isf förenklade speciella ekvationer vars lösningar kan skrivas med elementära funktioner
- ✓ Tillämpningar tidigt i utbildningsplanen
- ✓ Datorövningar där studenterna löser problem inklusive simuleringar genom att utveckla egna program. Mycket lärarhandled tid i datorsal 2-4h/vecka
- ✓ Uppgifter och tillämpningar från mekanik & hållfasthetslära och andra M-kurser i matematikkurserna
- ✓ Samarbete mellan parallella kurser genom gemensamma projekt

Den reformerade matematikutb

- ✓ Nya matematikkurser i årskurs 1
- ✓ Matlab som programmeringsmiljö och simuleringsverktyg under hela utbildningen
- ✓ Grundläggande kurs i programmering i Matlab
- ✓ Traditionell läroböcker *Calculus: A complete course*, R. A. Adams och *Linear algebra and its applications*, D. C. Lay
- ✓ Kompendium och föreläsningssanteckningar i beräkningsmatematik
- ✓ Traditionell analys fortfarande viktigt!
- ✓ Symboliska lösningar av speciella ekvationer i Mekanik & hållkurser
- ✓ Tillämpningsexempel och fysikaliska härledningar i matematiken
- ✓ Finita elementmetoden i Matematisk analys i flera variabler
- ✓ Beräkningsorienterade datorövningar och projektuppgifter i matematik, termodynamik och mekanik & hållfasthetslära

Varför Matlab (istället för Java, Python, C++, Fortran etc.)?

- Ett "general-purpose"-verktyg för alla kurser, tillämpningar och problem
- Enkelt att göra enkla saker ➡ verktyget upplevs som användbart även i andra sammanhang ➡ större sannolikhet att studenterna lär sig mer på egen hand
- Enkelt skapa grafer, simuleringar och animeringar
- Finns många inbyggda funktioner och "toolboxar"
- Lärare och forskare använder Matlab (tradition), används i tillämpade kurser och i forskning
- Viktigt att ha samma programmeringsmiljö i matematik och tillämpade kurser
- Studenter "får" installera Matlab på egna datorer under studietiden

Erfarenheter

- Studenterna anser att det är naturligt att använda datorn i matematiken. Användningen av datorberäkningar ökar motivationen att studera matematik
- Studenterna kan skriva en egen ODE-lösare för att lösa ordinära differentialekvationer (inklusive omskrivning av högre ordningens ODE till system av första ordningen)
- Studenterna kan formulera randvillkor för värmeledning och hållfasthetsproblem
- Studenterna förstår grunderna i finita elementmetoden och kan läsa maskintekniska problem med metoden
- Motivationen att studera matematik och mekanik & hållfasthetslära har ökat (mek & hållf i högre grad än matematik)

Erfarenheter

- Studenternas intresse för beräkningar och simuleringar har ökat
- Studenterna utför fler och mer analyser i senare projektkurser vilket ger bättre konstruktionslösningar
- Förmågan att utföra traditionell analys (härleda och lösa speciella differentialekvationer) i mekaniken har inte försämrats
- Förmågan att programmera Matlab i senare och parallella kurser har blivit markant bättre
- Resultaten på kurserna bättre, speciellt i kursen Matematisk analys i flera variabler som hade 80% godkända studenter
- Studenternas sammanfattande betyg i kursvärderingarna >4 (5)
- Ansvarig lärare prof Stig Larsson har fått M-studenternas pedagogiska pris (framröstad) och Chalmers pedagogiska pris (jury) för "sitt arbete med att integrera matematikämnet i ingenjörsämnet"

M-programmet

Civilingenjörsprogrammet i maskinteknik har organiserat utbildningen med fokus på grundläggande kunskaper och färdigheter, ingenjörens yrkesroll, integration av icketekniska färdigheter och sammanhang.

CDIO- baserad programbeskrivning grunden till programutveckling och uppföljning.

Programmets idé och pedagogik: M-programmet

har en stark bas i matematik och grundläggande maskintekniska ämnen där helhet och gemensamma principer för modellering och simulering betonas arbetar med helhet, gemensamma projekt och sekvensen av kurser för att undvika utbildningen inom ett ämne isoleras till en kurs

Introducerar och använder tidigt datorbaserade verktyg

Introducerar tidigt tillämpningar från de grundläggande ämnena för att förbereda för konstruera-implementera-(design-build)-projekt där verkliga och relevanta produkter och system skall skapas. Det finns minst ett projekt varje årskurs.

Programmets lärmål i matematik

Civilingenjören i maskinteknik skall:

1. Kunna tillämpa matematik och grundläggande naturvetenskap inom den tillämpade mekaniken och ha inblick i den klassiska fysikens mest grundläggande metoder. Centralt är att
 - 1.1. kunna numeriskt lösa linjära och olinjära system av algebraiska ekvationer,
 - 1.2. kunna lösa ordinära differentialekvationer av typerna: separabla, linjära inhomogen med konstanta koefficienter och Eulers,
 - 1.3. kunna numeriskt lösa system av linjära och olinjära ordinära differentialekvationer inklusive omskrivning till system av första ordningens differentialekvationer,
 - 1.4. kunna lösa egenvärdesproblem för diskreta och kontinuerliga system,
 - 1.5. kunna använda finita elementmetoden för att lösa partiella differentialekvationer,

Programmets lärmål i matematik

Civilingenjören i maskinteknik skall:

- 1.10 utifrån givna modeller och matematiska formuleringar programmera lösningar, inklusive grafisk presentation till tekniska problem i Matlab**
- 4. Kunna formulera teoretiska modeller och ställa upp ekvationer som beskriver dessa. Lösa ekvationerna för att kunna simulera verkligheten samt bedöma rimligheten i val av modell och noggrannheten lösningen.**

Matematikkurserna är utvecklade för att uppfylla dessa mål. Den nya utbildningen omfattar alla matematikkurser i årskurs 1.

Programmal 1-2	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	4
Kurser (obligatoriska)																	
Ingenjörsmetodik																	
Inledande matematik	U	I								U							
Programmerings i Matlab	A									U							U
Matematisk analys i en variabel	U	U	I							U							U
Termodynamik	A	A					U			U							U
Linjär algebra	U	U	U	U				A		U							U
Mekanik & hållfasthetslära 1	A	A	A	A				U		U	U	U					U
Matematisk analys i flera variabler	A	U	U	U	U			A		U							U
Mekanik & hållfasthetslära 2	A	A	A	U	U			U		U	U	U	U				U
Mekanik & hållfasthetslära 3	A	A	A	A				U		U	U						U
Materialteknik A och B	A	A	A	A				A	U								A
Maskinelement	A	A	A	A	A			A	A	A	A	A	U				A
Mekatronik	A	A	A					A	A	A	A					U	I
Tillverkningsteknik	A				A			A	A	A	A						
Industriell produktion och org.																	
Integrerad konstruktion & tillv	A	A			A			A	A	A	A	A	A	A			A
Industriell ekonomi																	
Miljö- och energiteknik	A	A						A									
Strömningsmekanik	A	A	A	A	A			A	U	U			U				U
Reglerteknik	A	A	A	A				A		U	A					A	U
Matematisk statistik	A	A	A					U		U							U
Kandidatarbete M3																	A
Masterprogram																	U
Examensarbete M5																	A

Del av
Programdesignmatrix

I= introducera
U= undervisa
A= använda

M-programmet

M1

Läsperiod 1	Läsperiod 2	Läsperiod 3	Läsperiod 4
Programmering i Matlab 4,5hp	Matematisk analys i en variabel 7,5hp	Linjär algebra 7,5hp	Matematisk analys i flera variabler 7,5hp
Inledande matematik 7,5hp	Termodynamik 4,5hp	Mekanik & hållfasthetslära 1 7,5hp	Mekanik & hållfasthetslära 2 7,5hp
Ingenjörsmetodik M 7,5hp			

M2

Mekanik & hållfasthetslära 3 7,5hp	Maskinelement 7,5hp	Mekatronik 7,5hp	Industriell produktion och organisation 7,5hp
Materialteknik M del A 7,5hp	Materialteknik M del B 7,5hp	Integrerad konstruktion och tillverkning 7,5hp	
		Tillverkningsteknik 4,5hp	Industriell ekonomi 4,5hp

M3

Miljö- och energiteknik 7,5hp	Reglerteknik 7,5hp	Kandidatarbete (15hp)	
Strömningsmekanik 7,5hp	Valbar 1 7,5hp	Valbar 2 7,5hp	Matematisk statistik 7,5hp

Valbar 1 (förbereder för kandidat)

- Energiovandling
- Finita elementmetoden
- Maskinkonstruktion
- Material för lätta konstruktioner
- Virtuell produktion

Valbar 2

- Industridesign
- Logistik
- Ljud och vibrationer (V)
- Transformer och differentialekvationer
- Värmeöverföring
- MTS-kurser
-

- Årskurs 3:s kurser Matematisk statistik och Transformer & differentialekvationer är inte inkluderade i den nya matematikutbildningen
- Kursen finita elementmetoden är en direkt fortsättning på Matematisk analys i flera variabler och Mekanik & hållfasthetslära 2
- Numeriska beräkningar och Matlabprogrammering ingår merparten av tillämpad kurser i årskurs 2 och 3; Maskinelement, Mekanik, Integrerad konstruktion och tillverkning, Tillverkningsteknik, Strömningsmekanik, Reglerteknik, Värmeöverföring osv
- Numeriska beräkning och Matlabprogrammering ingår i de flesta avslutande masterprogram (specialiseringar)

Inledande matematik

Kursen behandlar funktioner i en variabel, kontinuitet och derivata, vektorgeometri i planet och rummet samt Gauss elimination.

Datorövningar:

1. Funktionsgalleri. Rita grafer för ett stort antal funktioner
2. Geometri. Skriv Matlab-funktioner för skalärprodukt, projektion ..
3. Bisektionsalgoritmen. Implementera intervallhalveringsmetoden
4. Fixpunktsiteration.
5. Numerisk derivata.
6. Newtons metod med numerisk derivata

Matematisk analys i en variabel

Kursen fortsätter med envariabelanalysen. Beräkning av integraler och lösning av ordinära differentialekvationer (ODE) även för förståelse av integralkalkylen

Datorövningar: Vi skriver egna Matlab-funktioner för följande:

1. ODE1: primitiv funktion.
2. ODE2: Eulers metod för system av ODE.
3. ODE3: implicita metoder för system av ODE.
4. ODE4: randvärdesproblem (inskjutningsmetod med Newtonlösare)
Tillämpas på värmeledningsproblem i en variabel.

Linjär algebra

Traditionell kurs med datorövningar från den parallella kursen Mekanik & hållfasthetslära

Vi skriver egna Matlab-program för

1. Matrishertering (stångbärverk)
2. Geometri
3. Felanalys vid lösning av ekvationssystem (konditionstal)
4. Minsta kvadratmetod (kalibrering av Nortons lag för krypning)

Kalibrering av materialmodell (konstitutivmodell)

Metaller vid hög temperatur kryper dvs om vi håller spänningen konstant så ökar deformationen (töjningen) med tiden. Detta är en viskoelastisk effekt. Experiment har visat att spännings-töjningsförhållandet är icke-linjärt och en ofta använd modell för krypning hos metaller vid förhöjd temperatur är Nortons modell

$$\dot{\epsilon}^c = \frac{1}{\tau} \left| \frac{\sigma}{\sigma_c} \right|^n \quad (1)$$

där $\dot{\epsilon}^c$ är kryptöjningshastigheten, σ_c är en referensspänning. Tidskonstanten τ och exponenten n är konstanter eller parameterar som bestäms ur experiment. Att bestämma parameterarna utifrån experiment kallas *kalibrering*.

Uppgift

Parameterarna i Nortons modell skall anpassas till experimentella kryppdata för koppar vid $T = 250^\circ\text{C}$. Ur tabellen ser vi att vid spänningsnivån $\sigma = 49,1\text{ MPa}$ är töjningshastigheten

i	1	2	3	4	5
σ [MPa]	49,1	75,6	105,1	130,5	150,4
$\dot{\epsilon}^c$ [s^{-1}]	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$8,7 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$3,4 \cdot 10^{-5}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$

Tabell 1: Experimentella värden på töjningshastigheten för olika spänningsnivåer för koppar vid 250°C

$1,4 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ dvs det tar $t = 0,01/1,4 \cdot 10^{-8} \approx 7,1 \cdot 10^5 \text{ s} \approx 200 \text{ h}$ för materialet att krypa (töjas) 1%. Vi ser att töjningshastigheten ökar snabbt med spänningsnivån. Vi börjar med att skriva om Nortons modell ekv (1) mha logaritmlagarna till

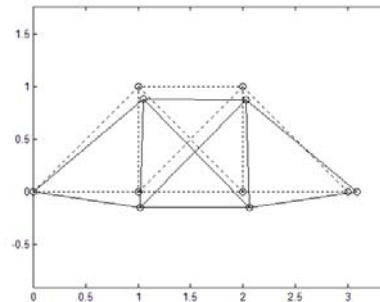
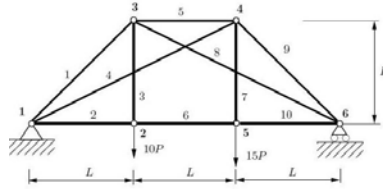
$$\ln(\dot{\epsilon}^c) = n \ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_c}\right) - \ln(\tau) \quad (2)$$

som ger ett linjärt samband och vi får ett linjärt minsta kvadratproblem.

När parameterarna, n och τ , har bestämts rita ekv (2) för intervallet $\sigma \in [49, 150]\text{ MPa}$. I samma figur skall de experimentella punkterna läggas in.

Analys av plant stångbärverk med matrisformulerad förskjutningsmetod

Bestäm stångkrafter, hantera stora ekvationssystem, konstruera om bärverket för att minska vikt. Visualisera spänningsfördelningen och rita deformerat stångbärverk.



Analys av plant stångbärverk med matrisformulerad förskjutningsmetod

Mål

- Öka förståelsen för de fundamentala principerna för statisk analys
- Hantera stora ekvationssystem
- Introduktion till finita elementmetoden och strukturmekniken
- Programmering, från problemdefinition till fungerande kod
- Motivera studier och entusiasmera

Matematisk analys i flera variabler

Traditionella inslag plus randvärdesproblem för partiella differentialekvationer och finita elementmetoden.

Härledning av värmeledningsekvationer och elasticitetsekvationer och motsvarande finita elementekvationer inklusive randvillkor

Börjar med 1D

$$\begin{aligned} -D(a(x)Du(x)) + c(x)u(x) &= f(x) && \text{fr } x \in I = (K, L), \\ a(x)D_nu(x) + k(x)(u(x) - u_A) &= g(x) && \text{fr } x = K, x = L, \end{aligned}$$

Motsvarande i flera variabler

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a\nabla u) + cu = f & \text{i } D, \\ \hat{\mathbf{N}} \cdot (a\nabla u) + k(u - u_A) = g & \text{p } S_2 \text{ (Neumann/Robin),} \\ u = u_A & \text{p } S_1 \text{ (Dirichlet).} \end{cases}$$

Matematisk analys i flera variabler

Använd Gauss divergenssats (fundamental och inte alltid med i flervariabel kurs!)

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \phi \, dV = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \phi \, dS - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla \phi \, dV.$$

Datorövningar

1. Visualisering av flervariabelfunktioner
2. Newtons metod för system av ekvationer med numerisk beräkning av Jacobi-matrisen
3. Extremvärdesproblem. Kritiska punkter
4. Finita elementmetoden 1D. Egenutvecklat Matlabprogram. Problem från hållfasthetsläran
5. Finita elementmetoden i 2D. Matlabs "PDE toolbox". Värmeledning och hållfasthetslära

Uppgift 3. Värmeledning i inhomogent material

$$-D(aDu) = f \quad \text{i } I = (0,1),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

med

$$f(x) = x, \quad a(x) = 1 \text{ fr } x < 1/2, \quad a(x) = 10 \text{ fr } x > 1/2.$$

Detta är Datorövning 6 från Ip2. Vad är den fysikaliska betydelsen?

Uppgift 4. Stång av två material

Lös följande randvärdesproblem

$$-D(EA Du) = \rho g A \quad \text{i } I = (0,L),$$

$$u(0) = 0, \quad E(L)A Du(L) = P,$$

med

$$E(x) = \begin{cases} 7, & x < L/2, \\ 22, & x > L/2, \end{cases} \quad \rho(x) = \begin{cases} 3, & x < L/2, \\ 8, & x > L/2, \end{cases}$$

och $L = 1$, $A = 1$, $g = 9.81$

Experimentera med olika värden på P .

Vad är den mekaniska betydelsen av randvärdesproblemet?

Uppgift 5. Elasticitet i rotationssymmetri

Lös följande randvärdesproblem

$$-\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}u = \frac{1-\nu^2}{E}K_r \quad \text{fr } r \in I = (a, b),$$

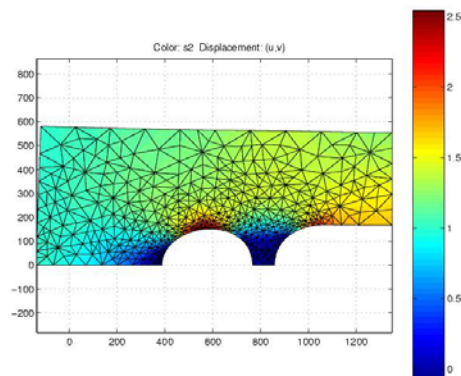
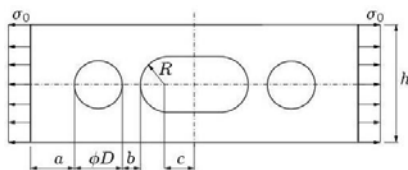
$$u(a) = 0, \quad u'(b) = 0.$$

med $K_r = \rho\omega^2r$.

Vad är den mekaniska betydelsen av detta problem?

Ex på projektuppgift: Analys av plan elastiska skiva med tre hål

Beräkna spänningskoncentrationsfaktorn (spänningsförhöjning vid hål). Avgör om spänningshöjningarna vid hålen samverkar. Symmetrier skall utnyttjas.



Analys av plan elastiska skiva med tre hål

Mål

- lösa elastiska randvärdesproblem med finita elementmetoden
- utveckla en känsla för spänningsfördelningar och lokala spänningshöjningar vid abrupta geometriändringar (tekniskt viktigt!)
- Motivera studier av elasticitetsteori (teoretisk del av hållfasthetsläran)
- Introduktion till finita elementmetoden och "general purpose" programvara
- Introduktion till feluppskattningar och adaptiv nätförfining

- Föreläsning 4-6h
- Skriftlig tenta me
- Bonuspoäng från

1. Beräkna integralen $\iint_T xy \, dA$ där T är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

2. Undersök funktionen $f(x) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{8}{x_1} - x_2$ med avseende på maxima, minima och sadelpunkter.

3. Skriv ned Taylors polynom av grad 2 med baspunkt $a = (1, 1)$ för funktionen i uppgift 2.

4. (a) Beräkna ett steg av Newtons metod för systemet

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

$$x_2 x_3 - x_3 = 0$$

$$x_3^2 - 1 = 0$$

med startpunkt $(1, 1, 1)$. (4 poäng)

(b) Härled Newtons metod med hjälp av linjärisering. (2 poäng)

(c) Skriv ned Newtons metod i MATLAB. Antag att funktionen `jacobi.m` finns. (2 poäng)

5. Härled den svaga formuleringen av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u) = f & \text{i } D, \\ a D_N u + k(u - u_A) = g & \text{på } S. \end{cases}$$

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ut ur området $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z, 0 \leq z \leq 1\}$ utan att använda divergenssatsen.

7. Beräkna flödet i uppgift 6 med hjälp av divergenssatsen.

8. (a) Visa att

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$$

(b) Bevisa partialintegrationsformeln

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \phi \, dV = \iint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{F} \phi \, dS - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla \phi \, dV$$

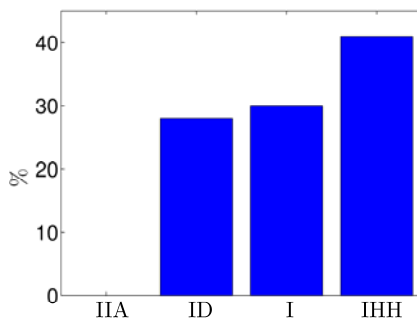
/stig

Utvärdering och resultat

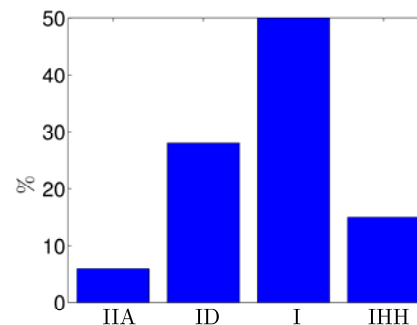
Alla kurser utvärderad enl Chalmersmodellen;

- tre möten mellan lärare och referensgrupp om 4-6 studenter. Vid slutmötet deltar även programledning.
- web-baserad enkät som skickas ut till alla studenter (svarsfrekvens 30-60%, ca 180 registrerade studenter).
- I enkäterna har vi lagt till specifika frågor om matematikutbildningen och kopplingen till parallella kurser.
- Vid slutmötet skrivs ett protokoll som länkas till kursens sida i Chalmers studieportal

Samtal och diskussioner med lärare i parallella och senare kurser

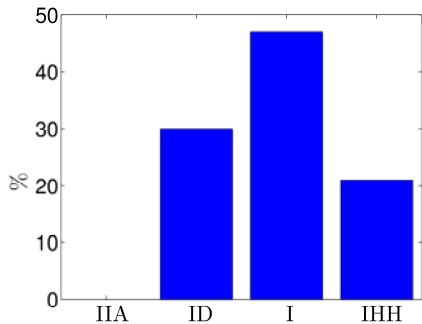


Det är naturligt att använda datorn i matematiken.

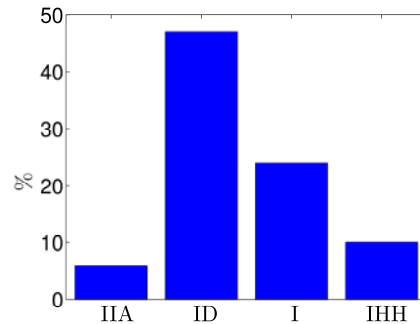


Jag förstår grunderna för finita elementmetoden.

IIA=Instämmer inte alls, ID=Instämmer delvis,
I=Instämmer, IHH=Instämmer helt och hållet

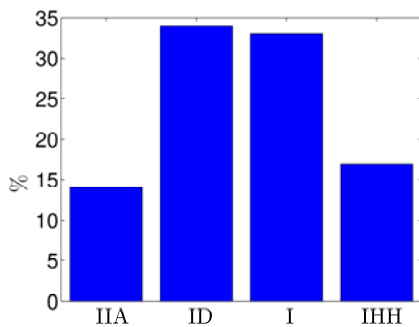


Jag kan formulera randvillkor för hållfasthets- och värmeledningsproblem.



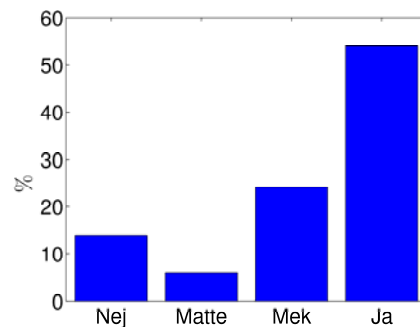
Jag kan lösa maskintekniska problem med finita elementmetoden.

IIA=Instämmer inte alls, ID=Instämmer delvis, I=Instämmer, IHH=Instämmer helt och hållet



Kopplingen mellan matematikkursen och den parallella kursen i mekanik & hållfasthetslära har ökat motivationen för studierna

IIA=Instämmer inte alls, ID=Instämmer delvis, I=Instämmer, IHH=Instämmer helt och hållet



Kopplingen mellan matematikkursen och den parallella kursen i mekanik & hållfasthetslära har underlättat inläringen.

Matte=Ja i matematik, Mek=Ja i Mekanik & hållfasthets lära, Ja=Ja i båda kurserna.

Slutsatser

- Matematik är integrerat i maskinprogrammet
 - inte bara matematik för matematikens skull dvs inget matematikerprogram
 - användbar matematik!
 - mekanikutbildning (härledningar, förståelse, problemlösning etc) i matematikkurserna och vice versa dvs matematikutbildning i mekanikkurserna
- Bättre förståelse för matematiken och matematikens roll ger ökad motivation etc
- Realistiska problem kan studeras tidigt i utbildningen
- Verktyg för analyser i projektkurser
- Studenterna är väl förberedda för avslutande masterprogram och yrkesliv

Varför simulering?

Kalle och Hobbe

av Bill Watterson



Mer om kurserna på

<http://www.chalmers.se/math/SV/utbildning/grundutbildning-chalmers/arkitekt-och/maskinteknik>