

# En övning i strukturell induktion

Karl Palmskog  
palmskog@kth.se

november 2010

## 1 Introduktion

Strukturell induktion är ett viktigt verktyg för att analysera program som använder sig av rekursiva datastrukturer. Nedan presenteras en övning i användningen av strukturell induktion, i ett scenario som ibland förekommer i systemutveckling—en given funktion ska ersättas av en funktion med samma specifikation som är mer effektiv. Här ska dock bevisas att den nya funktionen har samma beteende som den ursprungliga och att den faktiskt är effektivare.

I sektion 2 definieras listor och ett antal grundläggande funktioner på listor. I sektion 3 presenteras omvändningsfunktionerna som är fokus för analysen i sektion 4. I appendix A, B och C visas föreslagna lösningar på uppgifterna.

## 2 Listor

Vi börjar med att i BNF definiera den induktiva datatypen *List*, som tolkas som en lista av termer av typen *Letter*, bokstäver.

$$List ::= \text{empty} \mid \text{cons}(Letter, List)$$

**Övning 2.1.** Formulera en induktionsprincip för *List*-termer. Kvantifiera över alla enställiga predikat *P* som tar en sådana termer som argument.

### 2.1 Listors längd

Vi definierar en induktiv funktion **length** från mängden av listor till de naturliga talen som ger en listas längd.

**Definition 1.**

$$\begin{aligned} \mathbf{length}(\text{empty}) &\stackrel{\text{def}}{=} 0 \\ \mathbf{length}(\text{cons}(a, u)) &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \mathbf{length}(u) \end{aligned}$$

**Övning 2.2.** Bevisa stegvis genom att veckla ut definitionen för **length** att

$$\forall a \forall b \mathbf{length}(\text{cons}(a, \text{cons}(b, \text{empty}))) = 2.$$

## 2.2 Konkaterering av listor

Vi definierar en konkatereringsfunktion **conc** som tar två listor som argument och returnerar en sammanslagen lista.

**Definition 2.**

$$\begin{aligned}\mathbf{conc}(\text{empty}, v) &\stackrel{\text{def}}{=} v \\ \mathbf{conc}(\text{cons}(a, u), v) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{cons}(a, \mathbf{conc}(u, v))\end{aligned}$$

**Övning 2.3.** Bevisa stegvis genom att veckla ut definitionen för **conc** att

$$\forall a \forall b \mathbf{conc}(\text{cons}(a, \text{empty}), \text{cons}(b, \text{empty})) = \text{cons}(a, \text{cons}(b, \text{empty}))$$

**Övning 2.4.** Bevisa genom att använda strukturell induktion att

$$\forall u \mathbf{conc}(u, \text{empty}) = u$$

**Övning 2.5.** Bevisa genom att använda strukturell induktion att **conc** är associativ, dvs bevisa att

$$\forall u \forall v \forall w \mathbf{conc}(u, \mathbf{conc}(v, w)) = \mathbf{conc}(\mathbf{conc}(u, v), w)$$

## 3 Omvändning av listor

### 3.1 En första omvändningsfunktion

Vi definierar en initial omvändningsfunktion **reverse**.

**Definition 3.**

$$\begin{aligned}\mathbf{reverse}(\text{empty}) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{empty} \\ \mathbf{reverse}(\text{cons}(a, u)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{conc}(\mathbf{reverse}(u), \text{cons}(a, \text{empty}))\end{aligned}$$

**Övning 3.1.** Bevisa stegvis genom att veckla ut definitionen för **reverse** att

$$\forall a \forall b \mathbf{reverse}(\text{cons}(a, \text{cons}(b, \text{empty}))) = \text{cons}(b, \text{cons}(a, \text{empty}))$$

**Övning 3.2.** Bevisa med strukturell induktion och resultaten från övning 2.4 och 2.5 att **reverse** distribuerar över **conc**, dvs att

$$\forall u \forall v \mathbf{reverse}(\mathbf{conc}(u, v)) = \mathbf{conc}(\mathbf{reverse}(v), \mathbf{reverse}(u))$$

### 3.2 En effektivare omvändningsfunktion?

Vi definierar en funktion **rev** som en hjälpfunktion till en föreslagen ny omvändningsfunktion **reverse'**.

**Definition 4.**

$$\begin{aligned}\mathbf{rev}(\text{empty}, v) &\stackrel{\text{def}}{=} v \\ \mathbf{rev}(\text{cons}(a, u), v) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{rev}(u, \text{cons}(a, v)) \\ \mathbf{reverse}'(u) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{rev}(u, \text{empty})\end{aligned}$$

**Övning 3.3.** Bevisa stegvis genom att veckla ut definitionen för **reverse'** att

$$\forall a \forall b \text{ reverse}'(\text{cons}(a, \text{cons}(b, \text{empty}))) = \text{cons}(b, \text{cons}(a, \text{empty}))$$

**Övning 3.4.** Bevisa med strukturell induktion och resultatet från övning 2.5 att

$$\forall u \forall v \text{ conc}(\text{reverse}'(u), v) = \text{rev}(u, v)$$

**Övning 3.5.** Bevisa med hjälp av resultatet från övning 3.4 och strukturell induktion att

$$\forall u \text{ reverse}(u) = \text{reverse}'(u)$$

## 4 Effektivitetsanalys

### 4.1 Effektivitetsmått

För att uttrycka funktioners effektivitet kan man låta dem returnera tuplar, där den ena delen är ett effektivitetsmått och den andra delen är det önskade resultatet. De olika delarna görs sedan åtkomliga med tilläggsfunktioner enligt följande.

**Definition 5.**

$$\begin{aligned} \text{cost}(\langle s, d \rangle) &\stackrel{\text{def}}{=} s \\ \text{result}(\langle s, d \rangle) &\stackrel{\text{def}}{=} d \end{aligned}$$

### 4.2 Mätbara varianter av funktioner

Betrakta en mätbar variant av funktionen **conc**.

**Definition 6.**

$$\begin{aligned} \text{mconc}(\text{empty}, v) &\stackrel{\text{def}}{=} \langle 0, v \rangle \\ \text{mconc}(\text{cons}(a, u'), v) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{let } r = \text{mconc}(u', v) \text{ in} \\ &\quad \langle 1 + \text{cost}(r), \text{cons}(a, \text{result}(r)) \rangle \end{aligned}$$

**Övning 4.1.** Bevisa genom att använda strukturell induktion att **conc** och resultatdelen av **mconc** sammanfaller för alla listor, dvs att

$$\forall u \forall v \text{ result}(\text{mconc}(u, v)) = \text{conc}(u, v)$$

**Övning 4.2.** Bevisa genom att använda strukturell induktion att resultatdelen av **mconc** har den sammanlagda längden av båda argumenten, dvs att

$$\forall u \forall v \text{ length}(\text{result}(\text{mconc}(u, v))) = \text{length}(u) + \text{length}(v)$$

**Övning 4.3.** Bevisa att kostnadsdelen av **mconc** är precis längden av det första argumentet, dvs att

$$\forall u \forall v \text{ cost}(\text{mconc}(u, v)) = \text{length}(u)$$

Betrakta nu en mätbar variant av funktionen **reverse**.

**Definition 7.**

$$\begin{aligned} \mathbf{mreverse}(\text{empty}) &\stackrel{\text{def}}{=} \langle 0, \text{empty} \rangle \\ \mathbf{mreverse}(\text{cons}(a, u')) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{let } rr = \mathbf{mreverse}(u') \text{ in} \\ &\quad \text{let } rc = \mathbf{mconc}(\text{result}(rr), \text{cons}(a, \text{empty})) \text{ in} \\ &\quad \langle 1 + \mathbf{cost}(rc) + \mathbf{cost}(rr), \text{result}(rc) \rangle \end{aligned}$$

**Övning 4.4.** Bevisa genom att använda strukturell induktion och resultatet från övning 4.1 att **reverse** och resultatdelen av **mreverse** sammanfaller för alla listor, dvs att

$$\forall u \text{ result}(\mathbf{mreverse}(u)) = \mathbf{reverse}(u)$$

**Övning 4.5.** Bevisa genom att använda strukturell induktion och resultatet från övning 4.2 att resultatdelen av **mreverse** är längden av argumentet, dvs att

$$\forall u \text{ length}(\text{result}(\mathbf{mreverse}(u))) = \text{length}(u)$$

**Övning 4.6.** Bevisa genom att använda strukturell induktion och resultaten från övning 4.3 och 4.5 att dubbla kostnadsdelen av **mreverse** är lika med kvadraten av argumentets längd plus argumentets längd, dvs att

$$\forall u \ 2 \times \mathbf{cost}(\mathbf{mreverse}(u)) = \text{length}(u) \times \text{length}(u) + \text{length}(u)$$

Betrakta nu mätbara varianter av funktionerna **rev** och **reverse'**.

**Definition 8.**

$$\begin{aligned} \mathbf{mrev}(\text{empty}, v) &\stackrel{\text{def}}{=} \langle 0, v \rangle \\ \mathbf{mrev}(\text{cons}(a, u')) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{let } r = \mathbf{mrev}(u', \text{cons}(a, v)) \text{ in} \\ &\quad \langle 1 + \mathbf{cost}(r), \text{result}(r) \rangle \\ \mathbf{mreverse}'(u) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{mrev}(u, \text{empty}) \end{aligned}$$

**Övning 4.7.** Bevisa genom att använda strukturell induktion att resultatet av **rev** och resultatdelen av **mrev** sammanfaller för alla listor, dvs att

$$\forall u \ \forall v \ \text{result}(\mathbf{mrev}(u, v)) = \mathbf{rev}(u, v)$$

**Övning 4.8.** Bevisa genom att använda resultatet från övning 4.7 att **reverse'** och resultatdelen av **mreverse'** och sammanfaller för alla listor, dvs att

$$\forall u \ \text{result}(\mathbf{mreverse}'(u)) = \mathbf{reverse}'(u)$$

**Övning 4.9.** Bevisa genom att använda strukturell induktion att kostnadsdelen av **mrev** är lika med första argumentets längd, dvs att

$$\forall u \ \forall v \ \mathbf{cost}(\mathbf{mrev}(u, v)) = \text{length}(u)$$

**Övning 4.10.** Bevisa genom att använda resultatet från övning 4.9 att kostnadsdelen av **mreverse'** är lika med argumentets längd, dvs att

$$\forall u \ \mathbf{cost}(\mathbf{mreverse}'(u)) = \text{length}(u)$$

## A Listor

**Sats 2.1.**

$$\forall P P(\text{empty}) \wedge (\forall a \forall u' P(u') \rightarrow P(\text{cons}(a, u'))) \rightarrow \forall u P(u)$$

**Sats 2.2.**

$$\forall a \forall b \text{length}(\text{cons}(a, \text{cons}(b, \text{empty}))) = 2.$$

*Bevis.* Låt  $a$  och  $b$  vara *Letter*-termer.

$$\begin{aligned} \text{length}(\text{cons}(a, \text{cons}(b, \text{empty}))) & \\ = 1 + \text{length}(\text{cons}(b, \text{empty})) & \quad \{\text{Def. 1}\} \\ = 1 + 1 + \text{length}(\text{empty}) & \quad \{\text{Def. 1}\} \\ = 1 + 1 + 0 & \quad \{\text{Def. 1}\} \\ = 2 & \quad \{\text{Aritmetik}\} \end{aligned}$$

□

**Sats 2.3.**

$$\forall a \forall b \text{conc}(\text{cons}(a, \text{empty}), \text{cons}(b, \text{empty})) = \text{cons}(a, \text{cons}(b, \text{empty}))$$

*Bevis.* Låt  $a$  och  $b$  vara *Letter*-termer.

$$\begin{aligned} \text{conc}(\text{cons}(a, \text{empty}), \text{cons}(b, \text{empty})) & \\ = \text{cons}(a, \text{conc}(\text{empty}, \text{cons}(b, \text{empty}))) & \quad \{\text{Def. 2}\} \\ = \text{cons}(a, \text{cons}(b, \text{empty})) & \quad \{\text{Def. 2}\} \end{aligned}$$

□

**Sats 2.4.**

$$\forall u \text{conc}(u, \text{empty}) = u$$

*Bevis.* Låt  $u$  vara en *List*-term. Vi gör induktion över strukturen för  $u$ .

- Fall  $u = \text{empty}$ .

$$\begin{aligned} \text{conc}(\text{empty}, \text{empty}) & \\ = \text{empty} & \quad \{\text{Def. 2}\} \end{aligned}$$

- Fall  $u = \text{cons}(a, u')$  för  $a$  en *Letter*-term och  $u'$  en *List*-term.  
Antag som induktionshypotes (IH) att  $\text{conc}(u', \text{empty}) = u'$ .

$$\begin{aligned} \text{conc}(\text{cons}(a, u'), \text{empty}) & \\ = \text{cons}(a, \text{conc}(u', \text{empty})) & \quad \{\text{Def. 2}\} \\ = \text{cons}(a, u') & \quad \{\text{IH}\} \end{aligned}$$

□

**Sats 2.5.**

$$\forall u \forall v \forall w \text{conc}(u, \text{conc}(v, w)) = \text{conc}(\text{conc}(u, v), w)$$

*Bevis.* Låt  $u$  vara en *List*-term. Vi gör induktion över strukturen för  $u$ .

- Fall  $u = \text{empty}$ .

Låt  $v$  och  $w$  vara *List*-termer.

$$\begin{aligned} & \text{conc}(\text{empty}, \text{conc}(v, w)) \\ &= \text{conc}(v, w) && \{\text{Def. 2}\} \\ &= \text{conc}(\text{conc}(\text{empty}, v), w) && \{\text{Def. 2}\} \end{aligned}$$

- Fall  $u = \text{cons}(a, u')$  för  $a$  en *Letter*-term och  $u'$  en *List*-term.

Antag som induktionshypotes (IH) att  $\forall v \forall w \text{conc}(u', \text{conc}(v, w)) = \text{conc}(\text{conc}(u', v), w)$ , och låt  $v$  och  $w$  vara *List*-termer.

$$\begin{aligned} & \text{conc}(\text{cons}(a, u'), \text{conc}(v, w)) \\ &= \text{cons}(a, \text{conc}(u', \text{conc}(v, w))) && \{\text{Def. 2}\} \\ &= \text{cons}(a, \text{conc}(\text{conc}(u', v), w)) && \{\text{IH}\} \\ &= \text{conc}(\text{cons}(a, (\text{conc}(u', v))), w) && \{\text{Def. 2}\} \\ &= \text{conc}(\text{conc}(\text{cons}(a, u'), v), w) && \{\text{Def. 2}\} \end{aligned}$$

□

## B Omvändning av listor

**Sats 3.1.**

$$\forall a \forall b \text{reverse}(\text{cons}(a, \text{cons}(b, \text{empty}))) = \text{cons}(b, \text{cons}(a, \text{empty}))$$

*Bevis.* Låt  $a$  och  $b$  vara *Letter*-termer.

$$\begin{aligned} & \text{reverse}(\text{cons}(a, \text{cons}(b, \text{empty}))) \\ &= \text{conc}(\text{reverse}(\text{cons}(b, \text{empty})), \text{cons}(a, \text{empty})) && \{\text{Def. 3}\} \\ &= \text{conc}(\text{conc}(\text{reverse}(\text{empty}), \text{cons}(b, \text{empty})), \text{cons}(a, \text{empty})) && \{\text{Def. 3}\} \\ &= \text{conc}(\text{conc}(\text{empty}, \text{cons}(b, \text{empty})), \text{cons}(a, \text{empty})) && \{\text{Def. 2}\} \\ &= \text{conc}(\text{cons}(b, \text{empty}), \text{cons}(a, \text{empty})) && \{\text{Def. 2}\} \\ &= \text{cons}(b, \text{conc}(\text{empty}, \text{cons}(a, \text{empty}))) && \{\text{Def. 2}\} \\ &= \text{cons}(b, \text{cons}(a, \text{empty})) && \{\text{Def. 2}\} \end{aligned}$$

□

**Sats 3.2.**

$$\forall u \forall v \text{reverse}(\text{conc}(u, v)) = \text{conc}(\text{reverse}(v), \text{reverse}(u))$$

*Bevis.* Låt  $u$  vara en *List*-term. Vi gör induktion över strukturen för  $u$ .

- Fall  $u = \text{empty}$ .

Låt  $v$  vara en *List*-term.

$$\begin{aligned}
& \text{reverse}(\text{conc}(\text{empty}, v)) \\
&= \text{reverse}(v) && \{\text{Def. 2}\} \\
&= \text{conc}(\text{reverse}(v), \text{empty}) && \{\text{Sats 2.4}\} \\
&= \text{conc}(\text{reverse}(v), \text{reverse}(\text{empty})) && \{\text{Def. 3}\}
\end{aligned}$$

- Fall  $u = \text{cons}(a, u')$  för  $a$  en *Letter*-term och  $u'$  en *List*-term.

Antag som induktionshypotes (IH) att  $\forall v \text{reverse}(\text{conc}(u', v)) = \text{conc}(\text{reverse}(v), \text{reverse}(u'))$ , och låt  $v$  vara en *List*-term.

$$\begin{aligned}
& \text{reverse}(\text{conc}(\text{cons}(a, u'), v)) \\
&= \text{conc}(\text{reverse}(\text{conc}(u', v)), \text{cons}(a, \text{empty})) && \{\text{Def. 2}\} \\
&= \text{conc}(\text{conc}(\text{reverse}(v), \text{reverse}(u')), \text{cons}(a, \text{empty})) && \{\text{IH}\} \\
&= \text{conc}(\text{reverse}(v), \text{conc}(\text{reverse}(u'), \text{cons}(a, \text{empty}))) && \{\text{Sats 2.5}\} \\
&= \text{conc}(\text{reverse}(v), \text{reverse}(\text{cons}(a, u'))) && \{\text{Def. 3}\}
\end{aligned}$$

□

### Sats 3.3.

$$\forall a \forall b \text{reverse}'(\text{cons}(a, \text{cons}(b, \text{empty}))) = \text{cons}(b, \text{cons}(a, \text{empty}))$$

*Bevis.* Låt  $a$  och  $b$  vara *Letter*-termer.

$$\begin{aligned}
& \text{reverse}'(\text{cons}(a, \text{cons}(b, \text{empty}))) \\
&= \text{rev}(\text{cons}(a, \text{cons}(b, \text{empty})), \text{empty}) && \{\text{Def. 4}\} \\
&= \text{rev}(\text{cons}(b, \text{empty}), \text{cons}(a, \text{empty})) && \{\text{Def. 4}\} \\
&= \text{rev}(\text{empty}, \text{cons}(b, \text{cons}(a, \text{empty}))) && \{\text{Def. 4}\} \\
&= \text{cons}(b, \text{cons}(a, \text{empty})) && \{\text{Def. 4}\}
\end{aligned}$$

□

### Sats 3.4.

$$\forall u \forall v \text{conc}(\text{reverse}'(u), v) = \text{rev}(u, v)$$

*Bevis.* Låt  $u$  vara en *List*-term. Vi gör induktion över strukturen för  $u$ .

- Fall  $u = \text{empty}$ .

Låt  $v$  vara en *List*-term.

$$\begin{aligned}
& \text{conc}(\text{reverse}'(\text{empty}), v) \\
&= \text{conc}(\text{rev}(\text{empty}, \text{empty}), v) && \{\text{Def. 4}\} \\
&= \text{conc}(\text{empty}, v) && \{\text{Def. 4}\} \\
&= v && \{\text{Def. 2}\} \\
&= \text{rev}(\text{empty}, v) && \{\text{Def. 4}\}
\end{aligned}$$

- Fall  $u = \text{cons}(a, u')$  för  $a$  en *Letter-term* och  $u'$  en *List-term*.

Antag som induktionshypotes (IH) att  $\forall v \text{ conc}(\text{reverse}'(u'), v) = \text{rev}(u', v)$ , och låt  $v$  vara en *List-term*.

$$\begin{aligned}
& \text{conc}(\text{reverse}'(\text{cons}(a, u')), v) \\
&= \text{conc}(\text{rev}(u', \text{cons}(a, \text{empty})), v) && \{\text{Def. 4}\} \\
&= \text{conc}(\text{conc}(\text{rev}(u', \text{empty}), \text{cons}(a, \text{empty})), v) && \{\text{IH, Def. 4}\} \\
&= \text{conc}(\text{rev}(u', \text{empty}), \text{conc}(\text{cons}(a, \text{empty}), v)) && \{\text{Sats 2.5}\} \\
&= \text{conc}(\text{reverse}'(u'), \text{cons}(a, v)) && \{\text{Def. 4, Def. 2}\} \\
&= \text{rev}(\text{cons}(a, u'), v) && \{\text{IH, Def. 4}\}
\end{aligned}$$

□

**Sats 3.5.**

$$\forall u \text{ reverse}(u) = \text{reverse}'(u)$$

*Bevis.* Låt  $u$  vara en *List-term*. Vi gör induktion över strukturen för  $u$ .

- Fall  $u = \text{empty}$ .

$$\begin{aligned}
& \text{reverse}(\text{empty}) \\
&= \text{empty} && \{\text{Def. 3}\} \\
&= \text{rev}(\text{empty}, \text{empty}) && \{\text{Def. 4}\} \\
&= \text{reverse}'(\text{empty}) && \{\text{Def. 4}\}
\end{aligned}$$

- Fall  $u = \text{cons}(a, u')$  för  $a$  en *Letter-term* och  $u'$  en *List-term*.

Antag som induktionshypotes (IH) att  $\text{reverse}(u') = \text{reverse}'(u')$ .

$$\begin{aligned}
& \text{reverse}(\text{cons}(a, u')) \\
&= \text{conc}(\text{reverse}(u'), \text{cons}(a, \text{empty})) && \{\text{Def. 3}\} \\
&= \text{conc}(\text{reverse}'(u'), \text{cons}(a, \text{empty})) && \{\text{IH}\} \\
&= \text{reverse}'(\text{cons}(a, u')) && \{\text{Sats 3.4}\}
\end{aligned}$$

□

## C Effektivitetsanalys

**Sats 4.1.**

$$\forall u \forall v \text{ result}(\text{mconc}(u, v)) = \text{conc}(u, v)$$

*Bevis.* Låt  $u$  vara en *List-term*. Vi gör induktion över strukturen för  $u$ .

- Fall  $u = \text{empty}$ .

Låt  $v$  vara en *List-term*.

$$\begin{aligned}
& \text{result}(\text{mconc}(\text{empty}, v)) \\
&= \text{result}(\langle 0, v \rangle) && \{\text{Def. 6}\} \\
&= v && \{\text{Def. 5}\} \\
&= \text{conc}(\text{empty}, v) && \{\text{Def. 2}\}
\end{aligned}$$

- Fall  $u = \text{cons}(a, u')$  för  $a$  en *Letter-term* och  $u'$  en *List-term*.  
Antag som induktionshypotes (IH) att  $\forall v \text{result}(\text{mconc}(u', v)) = \text{conc}(u', v)$ ,  
och låt  $v$  vara en *List-term*.

$$\begin{aligned}
& \text{result}(\text{mconc}(\text{cons}(a, u'))) \\
&= \text{cons}(a, \text{result}(\text{mconc}(u', v))) && \{\text{Def. 6, Def. 5}\} \\
&= \text{cons}(a, \text{conc}(u', v)) && \{\text{IH}\} \\
&= \text{conc}(\text{cons}(a, u'), v) && \{\text{Def. 2}\}
\end{aligned}$$

□

**Sats 4.2.**

$$\forall u \forall v \text{length}(\text{result}(\text{mconc}(u, v))) = \text{length}(u) + \text{length}(v)$$

*Bevis.* Låt  $u$  vara en *List-term*. Vi gör induktion över strukturen för  $u$ .

- Fall  $u = \text{empty}$ .

Låt  $v$  vara en *List-term*.

$$\begin{aligned}
& \text{length}(\text{result}(\text{mconc}(\text{empty}, v))) \\
&= \text{length}(\text{result}(\langle 0, v \rangle)) && \{\text{Def. 6}\} \\
&= \text{length}(v) && \{\text{Def. 5}\} \\
&= 0 + \text{length}(v) && \{\text{Aritmetik}\} \\
&= \text{length}(\text{empty}) + \text{length}(v) && \{\text{Def. 1}\}
\end{aligned}$$

- Fall  $u = \text{cons}(a, u')$  för  $a$  en *Letter-term* och  $u'$  en *List-term*.

Antag som induktionshypotes (IH) att  $\forall v \text{length}(\text{result}(\text{mconc}(u', v))) = \text{length}(u') + \text{length}(v)$ , och låt  $v$  vara en *List-term*.

$$\begin{aligned}
& \text{length}(\text{result}(\text{mconc}(\text{cons}(a, u'), v))) \\
&= \text{length}(\text{cons}(a, \text{result}(\text{mconc}(u', v)))) && \{\text{Def. 6, Def. 5}\} \\
&= 1 + \text{length}(\text{result}(\text{mconc}(u', v))) && \{\text{Def. 1}\} \\
&= 1 + \text{length}(u') + \text{length}(v) && \{\text{IH}\} \\
&= \text{length}(\text{cons}(a, u')) + \text{length}(v) && \{\text{Def. 1}\}
\end{aligned}$$

□

**Sats 4.3.**

$$\forall u \forall v \text{cost}(\text{mconc}(u, v)) = \text{length}(u)$$

*Bevis.* Låt  $u$  vara en *List-term*. Vi gör induktion över strukturen för  $u$ .

- Fall  $u = \text{empty}$ .

Låt  $v$  vara en *List-term*.

$$\begin{aligned}
& \text{cost}(\text{mconc}(\text{empty}, v)) \\
&= \text{cost}(\langle 0, v \rangle) && \{\text{Def. 6}\} \\
&= 0 && \{\text{Def. 5}\} \\
&= \text{length}(\text{empty}) && \{\text{Def. 1}\}
\end{aligned}$$

- Fall  $u = \text{cons}(a, u')$  för  $a$  en *Letter-term* och  $u'$  en *List-term*.

Antag som induktionshypotes (IH) att  $\forall v \text{ cost}(\text{mconc}(u', v)) = \text{length}(u')$ , och låt  $v$  vara en *List-term*.

$$\begin{aligned}
& \text{cost}(\text{mconc}(\text{cons}(a, u'), v)) \\
&= 1 + \text{cost}(\text{mconc}(u', v)) && \{\text{Def. 6, Def. 5}\} \\
&= 1 + \text{length}(u') && \{\text{IH}\} \\
&= \text{length}(\text{cons}(a, u')) && \{\text{Def. 1}\}
\end{aligned}$$

□

**Sats 4.4.**

$$\forall u \text{ result}(\text{mreverse}(u)) = \text{reverse}(u)$$

*Bevis.* Låt  $u$  vara en *List-term*. Vi gör induktion över strukturen för  $u$ .

- Fall  $u = \text{empty}$ .

$$\begin{aligned}
& \text{result}(\text{mreverse}(\text{empty})) \\
&= \text{result}(\langle 0, \text{empty} \rangle) && \{\text{Def. 7}\} \\
&= \text{empty} && \{\text{Def. 5}\} \\
&= \text{reverse}(\text{empty}) && \{\text{Def. 3}\}
\end{aligned}$$

- Fall  $u = \text{cons}(a, u')$  för  $a$  en *Letter-term* och  $u'$  en *List-term*.

Antag som induktionshypotes (IH) att  $\text{result}(\text{mreverse}(u')) = \text{reverse}(u')$ .

$$\begin{aligned}
& \text{result}(\text{mreverse}(\text{cons}(a, u'))) \\
&= \text{result}(\text{mconc}(\text{result}(\text{mreverse}(u')), \text{cons}(a, \text{empty}))) && \{\text{Def. 6}\} \\
&= \text{conc}(\text{result}(\text{mreverse}(u')), \text{cons}(a, \text{empty})) && \{\text{Sats 4.1}\} \\
&= \text{conc}(\text{reverse}(u'), \text{cons}(a, \text{empty})) && \{\text{IH}\} \\
&= \text{reverse}(\text{cons}(a, u')) && \{\text{Def. 3}\}
\end{aligned}$$

□

**Sats 4.5.**

$$\forall u \text{ length}(\text{result}(\text{mreverse}(u))) = \text{length}(u)$$

*Bevis.* Låt  $u$  vara en *List-term*. Vi gör induktion över strukturen för  $u$ .

- Fall  $u = \text{empty}$ .

$$\begin{aligned}
& \text{length}(\text{result}(\text{mreverse}(\text{empty}))) \\
&= \text{length}(\text{result}(\langle 0, \text{empty} \rangle)) && \{\text{Def. 7}\} \\
&= \text{length}(\text{empty}) && \{\text{Def. 5}\}
\end{aligned}$$

- Fall  $u = \text{cons}(a, u')$  för  $a$  en *Letter-term* och  $u'$  en *List-term*.  
Antag som induktionshypotes (IH) att  $\text{length}(\text{result}(\text{mreverse}(u'))) = \text{length}(u')$ .

$$\begin{aligned}
& \text{length}(\text{result}(\text{mreverse}(\text{cons}(a, u')))) \\
&= \text{length}(\text{result}(\text{mconc}(\text{result}(\text{mreverse}(u')), \text{cons}(a, \text{empty})))) \quad \{\text{Def. 7}\} \\
&= \text{length}(\text{result}(\text{mreverse}(u'))) + \text{length}(\text{cons}(a, \text{empty})) \quad \{\text{Sats 4.2}\} \\
&= 1 + \text{length}(\text{result}(\text{mreverse}(u'))) \quad \{\text{Aritmetik}\} \\
&= 1 + \text{length}(u') \quad \{\text{IH}\} \\
&= \text{length}(\text{cons}(a, u')) \quad \{\text{Def. 1}\}
\end{aligned}$$

□

**Sats 4.6.**

$$\forall u \ 2 \times \text{cost}(\text{mreverse}(u)) = \text{length}(u) \times \text{length}(u) + \text{length}(u)$$

*Bevis.* Låt  $u$  vara en *List-term*. Vi gör induktion över strukturen för  $u$ .

- Fall  $u = \text{empty}$ .

$$\begin{aligned}
& 2 \times \text{cost}(\text{mreverse}(\text{empty})) \\
&= 2 \times \text{cost}(\langle 0, \text{empty} \rangle) \quad \{\text{Def. 7}\} \\
&= 0 \quad \{\text{Def. 5}\} \\
&= 0 \times 0 + 0 \quad \{\text{Aritmetik}\} \\
&= \text{length}(\text{empty}) \times \text{length}(\text{empty}) + \text{length}(\text{empty}) \quad \{\text{Def. 1}\}
\end{aligned}$$

- Fall  $u = \text{cons}(a, u')$  för  $a$  en *Letter-term* och  $u'$  en *List-term*.

Antag som induktionshypotes (IH) att  $2 \times \text{cost}(\text{mreverse}(u')) = \text{length}(u') \times \text{length}(u') + \text{length}(u')$ .

$$\begin{aligned}
& 2 \times \text{cost}(\text{mreverse}(\text{cons}(a, u'))) \\
&= 2 \times (1 + \text{length}(\text{result}(\text{mreverse}(u'))) + \text{cost}(\text{mreverse}(u'))) \quad \{\text{Def. 7, Sats 4.3}\} \\
&= 2 \times (1 + \text{length}(u') + \text{cost}(\text{mreverse}(u'))) \quad \{\text{Sats 4.5}\} \\
&= 2 \times (1 + \text{length}(u')) + 2 \times \text{cost}(\text{mreverse}(u')) \quad \{\text{Aritmetik}\} \\
&= 2 \times (1 + \text{length}(u')) + \text{length}(u') \times \text{length}(u') + \text{length}(u') \quad \{\text{IH}\} \\
&= (1 + \text{length}(u')) \times (1 + \text{length}(u')) + (1 + \text{length}(u')) \quad \{\text{Aritmetik}\} \\
&= \text{length}(\text{cons}(a, u')) \times \text{length}(\text{cons}(a, u')) + \text{length}(\text{cons}(a, u')) \quad \{\text{Def. 7}\}
\end{aligned}$$

□

**Sats 4.7.**

$$\forall u \ \forall v \ \text{result}(\text{mrev}(u, v)) = \text{rev}(u, v)$$

*Bevis.* Låt  $u$  vara en *List-term*. Vi gör induktion över strukturen för  $u$ .

- Fall  $u = \text{empty}$ .

Låt  $v$  vara en *List-term*.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{result}(\mathbf{mrev}(\text{empty}, v)) \\
&= \mathbf{result}(\langle 0, v \rangle) && \{\text{Def. 8}\} \\
&= v && \{\text{Def. 5}\} \\
&= \mathbf{rev}(\text{empty}, v) && \{\text{Def. 4}\}
\end{aligned}$$

- Fall  $u = \text{cons}(a, u')$  för  $a$  en *Letter-term* och  $u'$  en *List-term*.

Antag som induktionshypotes (IH) att  $\forall v \mathbf{result}(\mathbf{mrev}(u', v)) = \mathbf{rev}(u', v)$ , och låt  $v$  vara en *List-term*.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{result}(\mathbf{mrev}(\text{cons}(a, u'), v)) \\
&= \mathbf{result}(\mathbf{mrev}(u', \text{cons}(a, v))) && \{\text{Def. 8}\} \\
&= \mathbf{rev}(u', \text{cons}(a, v)) && \{\text{IH}\}
\end{aligned}$$

□

**Sats 4.8.**

$$\forall u \mathbf{result}(\mathbf{mreverse}'(u)) = \mathbf{reverse}'(u)$$

*Bevis.*

$$\begin{aligned}
& \mathbf{result}(\mathbf{mreverse}'(u)) \\
&= \mathbf{rev}(u, \text{empty}) && \{\text{Sats 4.7}\} \\
&= \mathbf{reverse}'(u) && \{\text{Def 4}\}
\end{aligned}$$

□

**Sats 4.9.**

$$\forall u \forall v \mathbf{cost}(\mathbf{mrev}(u, v)) = \mathbf{length}(u)$$

*Bevis.* Låt  $u$  vara en *List-term*. Vi gör induktion över strukturen för  $u$ .

- Fall  $u = \text{empty}$ .

Låt  $v$  vara en *List-term*.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{cost}(\mathbf{mrev}(\text{empty}, v)) \\
&= \mathbf{cost}(\langle 0, v \rangle) && \{\text{Def. 8}\} \\
&= 0 && \{\text{Def. 5}\} \\
&= \mathbf{length}(\text{empty}) && \{\text{Def. 1}\}
\end{aligned}$$

- Fall  $u = \text{cons}(a, u')$  för  $a$  en *Letter-term* och  $u'$  en *List-term*.

Antag som induktionshypotes (IH) att  $\forall v \mathbf{cost}(\mathbf{mrev}(u', v)) = \mathbf{length}(u')$ , och låt  $v$  vara en *List-term*.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{cost}(\mathbf{mrev}(\text{cons}(a, u'), v)) \\
&= 1 + \mathbf{cost}(\mathbf{mrev}(u', \text{cons}(a, v))) && \{\text{Def. 8, Def. 5}\} \\
&= 1 + \mathbf{length}(u') && \{\text{IH}\} \\
&= \mathbf{length}(\text{cons}(a, u')) && \{\text{Def. 1}\}
\end{aligned}$$

□

**Sats 4.10.**

$$\forall u \text{ cost}(\text{mreverse}'(u)) = \text{length}(u)$$

*Bevis.*

$$\begin{aligned} \text{cost}(\text{mreverse}'(u)) & \\ &= \text{cost}(\text{mrev}(u, \text{empty})) && \{\text{Def 8}\} \\ &= \text{length}(u) && \{\text{Sats 4.9}\} \end{aligned}$$

□