Krümmungsvisualisierung für 3D-Vektorfelder

Diplomarbeit

von

Tino Weinkauf

geboren am 31. Oktober 1974 in Rostock

30. Juni 2000

Betreuer:
Prof. H. Schumann
Dr. H. Theisel

Universität Rostock
Fachbereich Informatik
Institut für Computergraphik

Danksagung

An vielen späten Abenden, die oft zu langen Nächten wurden, haben mein guter Freund und Betreuer Holger Theisel und ich geredet, diskutiert, gestritten über Formeln, Bilder, Cracks, Beweisschemata und vieles weitere mehr, das nun in dieser Arbeit kurz und prägnant dargestellt ist. Und mir scheint, es werden nicht die letzten derartigen Abende gewesen sein. Als ich mich entschied, dieses Diplomthema in Angriff zu nehmen, wollte ich damit die theoretischen Aspekte meines Studiums vertiefen, und ich fand in Dir, Holger, den dafür richtigen Förderer. Deine Anregungen haben nicht nur diese Arbeit vorangetrieben, sondern in mir das Interesse an theoretischen Betrachtungen wieder zum Leben erweckt. Ich wusste schon aus meinen Zeiten an der Spezialschule, dass Mathematik eine reine, unverfälschte Wissenschaft ist, aber durch Dich habe ich es erfahren. Die Wurzeln der Informatik liegen in der Mathematik und daher erhält sie auch ihre größte Kraft. Lass uns dennoch nicht vergessen: Grau ist alle Theorie — wenn sich nicht hier und da ein Stückchen Praxis einschleicht. Genauso wie das Leben ohne Abwechslung grau wäre.

Meiner Professorin Heidrun Schumann verdanke ich die Freude an der Computergraphik. Die Diskussionen in den Vorlesungen, der Vorschlag zum Drehen eines Kurzfilms und Deine immer berechtigten Kritiken an meiner Arbeit — das hat die Sinne geschärft und den Sinn gestärkt. Auch bei dieser Arbeit hast Du den Finger immer genau in die Wunden gelegt, von denen ich dachte, es würde sie niemand bemerken. Deine Vorschläge zur Verbesserung habe ich sehr gern aufgenommen und umgesetzt. Ich möchte Dir insbesondere für Dein Vertrauen danken, das Du mir im Zusammenhang mit meiner ersten Veröffentlichung entgegengebracht hast. Das war nicht selbstverständlich und hat mich in der Planung meines Weges bestärkt. Ich hoffe, Du bist nicht allzu entsetzt ob dieser informellen Danksagung. Ich habe versucht, mich zurückzuhalten...

Ich erinnere mich noch oft an die Zeit, als Uwe Rauschenbach und ich uns gemeinsam der Entwicklung des FishEye–Views widmeten. Diese Zeit will ich nicht missen und schon gar nicht der Vergangenheit zuordnen. Für Deine aufopferungsvolle Betreuungsarbeit im Rahmen meiner Studienarbeit möchte ich mich bei Dir auch noch mal in dieser Form bedanken.

Auch die anderen Angehörigen unseres Institutes standen mir immer hilfreich und mit einem Lächeln zur Seite. Dieses Gemeinschaftsgefühl unter uns allen war mir immer sehr deutlich und hatte nicht zuletzt auch positive Auswirkungen auf diese Arbeit.

Ich wüsste nicht wirklich, welch Sinn zu hegen, welch Hoffnung zu tragen, wenn da nicht meine Partnerin Wenke wäre. Du bist eine der wenigen Menschen, die es schaffen, dass ich das Ruder freilassen kann. Es ist immer ein Kampf in mir mit all den Dingen dieser Welt, doch gibt es Momente in Deiner Nähe, in denen ich zu mir selbst werde. Und all die politischen, philosophischen und künstlerischen Diskussionen mit Dir geben mir das Gefühl, noch Revolution in mir zu tragen. Dafür danke ich Dir.

Ich war circa 12 Jahre alt, als meine Eltern mir meinen ersten Computer kauften. Das war mit Sicherheit der erste Schritt zu dieser Diplomarbeit, für den ich Euch sehr dankbar bin. Ihr habt mir immer meinen Freiraum für eigene Entscheidungen gelassen und standet mir hilfreich als engste Freunde auf meinem Weg bei. Ohne Eure Ermutigungen hätte ich wohl oft nicht das Vertrauen in mich zur Annahme bestimmter Förderungen gehabt. Meine Art, mein Wesen und auch meine Ausbildung ist Euer Verdienst. Ich danke Euch.

Die Arbeit an meinem Diplom hat viel Kraft und Zeit erfordert, und ich bin sehr glücklich darüber, dieses aufbringen zu können. Mit Eurer Hilfe.

Tino Weinkauf
28. Juni 2000

Zusammenfassung

Tangentenkurven sind ein wichtiges Mittels zur Analyse und Visualisierung von Vektorfeldern, jedoch lassen sich diese Kurven für hinreichend komplizierte Vektorfelder nicht geschlossen analytisch beschreiben. In dieser Arbeit werden zwei wichtige Größen von Tangentenkurven untersucht, ihre Krümmung und Torsion, welche sich aus den partiellen Ableitungen des Vektorfeldes herleiten lassen. Weiterhin wird das neue Konzept der Normalenflächen eines Vektorfeldes und deren Gaußsche und mittlere Krümmung vorgestellt. Mittels Krümmung und Torsion sowie Gaußscher und mittlerer Krümmung werden 4 Skalarfelder definiert, von denen gezeigt wird, dass zumindest immer eines dieser Felder in der Nähe kritischer Punkte von linearen Vektorfeldern divergiert. Die Visualisierung dieser Größen hat somit topologische Relevanz. Es werden mehrere Visualisierungsmethoden zur Darstellung dieser Größen entwickelt und bewertet. Weiterhin wird nachgewiesen, dass die mittlere Krümmung der Normalenflächen eine bestimmte Untermenge der linearen Vektorfelder eindeutig beschreibt.

Abstract

Tangent curves are a powerful tool for analysing and visualizing vector fields. For sufficiently complicated vector fields they can only be implicitly described. However, in this work two of their most important properties will be studied: their curvature and torsion. Both of them can be computed only by knowing the partial derivates of a vector field. Furthermore, the new concept of normal surfaces and their Gaussian and mean curvature will be introduced to the theory of vector fields. For curvature, torsion, Gaussian and mean curvature it can be shown that at least one of the scalar fields describing these measures tends to infinity in the neighborhood around a critical point of a linear vector field. Therefore, the visualization of those scalar fields has a topological relevance. Several visualization techniques for this purpose will be discussed. Furthermore, it can be shown that the mean curvature uniquely describes linear vector fields in canonical form.

CR-Klassifikation

D.1.3 I.3 I.3.3 I.3.7

Keywords

3D-Strömungsvisualisierung, Vektorfeldtopologie, Tangentenkurven, Krümmung

Bis jetzt all mein Leben
schreie ich hier nur
meine Seele heraus.
Und eigentlich heißt die Frage
nach dem wer Du seist:
Bin ich ´ne Gute Muse?

Erkläre ich meinen Ausdruck
mit Deinem Gefühl,
oder laß ich mein Wesen
nun endlich heraus?
Und eigentlich heißt die Frage
nach dem was ich bin:
Bist Du ´ne Gute Muse?

Was ist mit dem Ruder,
wer läßt es frei?
Wozu nun das Steuer
am besten sei,
und wozu der Irrwege Pfad?;
(Harmonie.!? Schizofrenie.!?)

kaspar loob

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

In vielen Bereichen von Wissenschaft und Technik werden die Eigenschaften von Vektorfeldern untersucht, da viele der anfallenden Daten in dieser Form gegeben sind. So ist beispielsweise in der Medizin oder der Strömungsmechanik die Visualisierung von Vektorfeldern ein bedeutendes Thema. Insbesondere das Verhalten der Tangentenkurven wird untersucht und oftmals auch visualisiert.

Jedoch ist es bei hinreichend komplizierten Vektorfeldern nicht möglich, die Tangentenkurven explizit zu beschreiben. Holger Theisel schlug deshalb in [The95] die Visualisierung der Krümmung der Tangentenkurven vor, die nur die Kenntnis der partiellen Ableitungen des Vektorfeldes voraussetzt. Es wurde für Vektorfelder im 2-dimensionalen Raum bewiesen, dass mit Hilfe einer dementsprechenden Krümmungsvisualisierung (auch Krümmungsplot genannt) eindeutige Aussagen über die Topologie eines Vektorfeldes gemacht werden können.

Dieses Konzept soll in der vorliegenden Arbeit auf Vektorfelder im 3-dimensionalen Raum erweitert werden. Dazu werden zunächst im Kapitel 2 die grundlegenden Definitionen und Notationen, die die Basis dieser Arbeit bilden, vorgestellt. Es wird dabei das neue Konzept der Normalenflächen vorgestellt.

Im Kapitel 3 werden dann Skalarfelder vorgestellt, die bestimmte Eigenschaften eines Vektorfeldes widerspiegeln. Hierbei handelt es sich analog zu [The95] auch um die Krümmung der Tangentenkurven, aber in Erweiterung des 2D-Falls auch um deren Torsion. Zudem werden die Krümmungseigenschaften der in Kapitel 2 vorgestellten Normalenflächen untersucht.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Frage, welche der neu eingeführten Skalarfelder zusammen ein Vektorfeld eindeutig beschreiben.

Im 3-dimensionalen Raum ist die Visualisierung von Skalarfeldern aufgrund der möglichen Überdeckungen besonders kompliziert. Im Kapitel 5 werden deshalb die mit der praktischen Umsetzung verbundenen Probleme dargestellt sowie Methoden vorgeführt, die in Kapitel 3 eingeführten Skalarfelder wirkungsvoll und an deren spezielle Gegebenheiten angepasst zu visualisieren.

Im Kapitel 6 werden dann die vorgestellten Methoden bewertet, während sich Kapitel 7 einer Zusammenfassung und dem Ausblick widmet.

Kapitel 2

Vektorfelder

In diesem Kapitel werden grundlegende Notationen und Definitionen vorgestellt, die eine Basis für die weitergehenden Betrachtungen in den darauffolgenden Kapiteln darstellen.

2.1 Allgemeine Definitionen

Definition. *Sei $\mathbb{E}^3$ der 3-dimensionale, euklidische Raum, in dem ein kartesisches Koordinatensystem definiert sei. Weiterhin sei $\mathbb{R}^3$ ein 3-dimensionaler Vektorraum. Ein* 3-DIMENSIONALES VEKTORFELD *ist nunmehr eine Abbildung der Form:*

$$V : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}^3$$

Folgende Notation soll hierfür benutzt werden:

$$V(P) = V(x,y,z) = \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Die partiellen Ableitungen des Vektorfeldes werden durch die jeweiligen Ableitungen der Einzelkomponenten u, v, w bestimmt und wie folgt notiert, wobei $u_x(x,y,z) = u(x,y,z)\frac{d}{dx}$:

$$V_x = \begin{pmatrix} u_x(x,y,z) \\ v_x(x,y,z) \\ w_x(x,y,z) \end{pmatrix} \quad V_y = \begin{pmatrix} u_y(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ w_y(x,y,z) \end{pmatrix} \quad V_z = \begin{pmatrix} u_z(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \\ w_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Die Ableitungen höherer Ordnungen folgen ebenso diesen Notationsregeln. Im Rahmen dieser Arbeit wird angenommen, dass alle partiellen Ableitungen des Vektorfeldes existieren und stetig sind.

Definition. *Ein Punkt $K \in \mathbb{E}^3$ wird als* KRITISCHER PUNKT DES VEKTORFELDES *V bezeichnet, wenn $V(K) = \mathbf{0}$ und für alle Punkte P in einer ϵ-Umgebung von K gilt: $V(P) \neq \mathbf{0}$.*

In einem kritischen Punkt ist die Richtung des Vektorfeldes nicht definiert. Jedoch jedem anderen Punkt $P \in \mathbb{E}^3$ wird durch das Vektorfeld eine Richtungsund eine Längeninformation in Form eines Vektors zugewiesen. Entsprechend der Ausrichtung der Vektoren kann man sogenannte Tangentenkurven (tangent curve, stream line, flow line, characteristic curve) definieren.

Definition. *Eine Kurve $L \subseteq \mathbb{E}^3$ wird als* TANGENTENKURVE *des Vektorfeldes V bezeichnet, wenn für alle Punkte $P \in L$ der Tangentenvektor der Kurve in diesem Punkt die gleiche Richtung hat wie der Vektor $V(P)$.*

Somit stellt eine Tangentenkurve den Verlauf eines masselosen (und damit unträgen) Teilchens im Vektorfeld dar. Durch alle Punkte P im Vektorfeld, für die eine eindeutige Richtung definiert ist ($V(P) \neq \mathbf{0}$), läuft jeweils genau *eine* Tangentenkurve. Tangentenkurven können sich nicht schneiden oder in einem Punkt zusammenlaufen und vereinigen (dies alles aufgrund der eindeutigen Richtungsinformation).

Tangentenkurven können i.a. nicht geschlossen analytisch beschrieben werden, sondern zumeist nur implizit als Lösung eines Differentialgleichungssystems. Dieser Umstand erschwert die Untersuchung der Eigenschaften eines Vektorfeldes erheblich. Eine Tangentenkurve $L(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ des Vektorfeldes $V = (u, v, w)^T$ wird folgendermaßen beschrieben:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z) \tag{2.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, z) \tag{2.2}$$

$$\frac{dz}{dt} = w(x, y, z) \tag{2.3}$$

Wie die Definition der Tangentenkurven zeigt, sind diese nicht abhängig von der Länge der Vektoren. Eine Normierung (oder aber auch jede andere Art der Längenänderung) der Vektoren eines Vektorfeldes beeinflusst also den Verlauf der Tangentenkurven nicht.

Definition. *$\overline{V}$ wird als* NORMIERTES VEKTORFELD *bzw. als* DIRECTION FIELD *des Vektorfeldes V bezeichnet, g.d.w.*

$$\forall P \in \mathbb{E}^3 : \overline{V}(P) = \frac{V(P)}{\|V(P)\|} \tag{2.4}$$

Die Richtung der Vektoren im Vektorfeld $\overline{V}$ entspricht also der Richtung in V, jedoch wurden die Vektoren auf die Länge 1 normiert. Es gilt:

$$\overline{V} \cdot \overline{V} = 1 \tag{2.5}$$

Differenziert man diese Gleichung in x-, y- bzw. z-Richtung, so erhält man:

$$\overline{V} \cdot \overline{V}_x = 0 \tag{2.6}$$

$$\overline{V} \cdot \overline{V}_y = 0 \tag{2.7}$$

$$\overline{V} \cdot \overline{V}_z = 0 \tag{2.8}$$

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung des normierten Vektorfeldes stehen also senkrecht zu $\overline{V}$. Für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung ergeben sich nach weiterem Differenzieren von (2.6), (2.7) und (2.8) folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
\overline{V}_x \cdot \overline{V}_y + \overline{V} \cdot \overline{V}_{xy} &= 0 &\quad (2.9)\\
\overline{V}_x \cdot \overline{V}_z + \overline{V} \cdot \overline{V}_{xz} &= 0 &\quad (2.10)\\
\overline{V}_y \cdot \overline{V}_z + \overline{V} \cdot \overline{V}_{yz} &= 0 &\quad (2.11)\\
\overline{V}_x^2 + \overline{V} \cdot \overline{V}_{xx} &= 0 &\quad (2.12)\\
\overline{V}_y^2 + \overline{V} \cdot \overline{V}_{yy} &= 0 &\quad (2.13)\\
\overline{V}_z^2 + \overline{V} \cdot \overline{V}_{zz} &= 0 &\quad (2.14)
\end{aligned}$$

Definition. *Sei V ein beliebiges 3D-Vektorfeld. Dann bezeichnet man*

$$\mathrm{div}(V) = u_x + v_y + w_z$$

als DIVERGENZ VON V.

Interpretiert man ein Vektorfeld als Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit, so bezeichnet die Divergenz den Masseverlust bzw. die Ergiebigkeit des Feldes. Fließt an einem Punkt ebensoviel Masse zu wie ab, so ist $\mathrm{div}(V) = 0$. Falls jedoch mehr Masse ab- als zufließt, so handelt es sich um eine sogenannte QUELLE und es gilt: $\mathrm{div}(V) > 0$. Punkte, an denen mehr zu- als abfließt, nennt man SENKEN; deren Divergenz ist negativ.

Definition. *Sei V ein beliebiges Vektorfeld. $\breve{V}$ wird als* INVERSES VEKTORFELD VON V *bezeichnet, wenn für jeden Punkt $P \in \mathbb{E}^3$ gilt:*

$$\breve{V}(P) = -V(P)$$

2.2 Topologie eines Vektorfeldes

Die Topologie eines Vektorfeldes wird vollständig bestimmt durch die Anzahl, Art und Lage seiner kritischen Punkte sowie gewissen charakteristischen Tangentenkurven zwischen ihnen. In diesem Abschnitt soll das Verhalten des Vektorfeldes in der Umgebung der kritischen Punkte analysiert und (soweit möglich) klassifiziert werden. Zunächst ist es sinnvoll, die Topologie von 2D-Vektorfeldern zu untersuchen und die somit gewonnenen Erkenntnisse auf den 3D-Fall zu übertragen.

Das Verhalten des Vektorfeldes in der näheren Umgebung eines kritischen Punktes klassifiziert diesen und kann mittels des Verlaufes der Tangentenkurven untersucht werden. Man unterscheidet im 2D hierbei zwischen folgenden Möglichkeiten:

- Center. Geschlossene Tangentenkurven „umkreisen“ den kritischen Punkt (Abbildung 2.1a).
- Focus. Spiralförmige Tangentenkurven „berühren“ mit ihrem Anfangs- oder Endpunkt den kritischen Punkt (Abbildung 2.1b).
- Die Umgebung aller anderen kritischen Punkte besteht aus mehreren Sektoren, in denen der Verlauf der Tangentenkurven nach folgenden Kriterien unterschieden werden kann:
  - Elliptischer Sektor. Alle Tangentenkurven beginnen *und* enden am kritischen Punkt (Abbildung 2.1c).
  - Parabolischer Sektor. Entweder beginnen (Abbildung 2.1d) *oder* enden (Abbildung 2.1e) alle Tangentenkurven am kritischen Punkt.
  - Hyperbolischer Sektor. Alle Tangentenkurven führen am kritischen Punkt vorbei (Abbildung 2.1f).

Die verschiedenen Sektoren werden durch spezielle Tangentenkurven, sogenannten SEPARATIONSLINIEN, voneinander abgetrennt. Jedem kritischen Punkt eines 2D-Vektorfeldes kann ein sogenannter INDEX zugeordnet werden, der die Anzahl der gegen den Uhrzeigensinn gerichteten Umdrehungen der Vektoren auf einem um den kritischen Punkt gezogenen Kreis angibt. Es ist leicht zu zeigen, dass dieser Index p nur aus der Anzahl der elliptischen Sektoren a und der Anzahl der hyperbolischen Sektoren c berechnet werden kann [FG82]:[1]

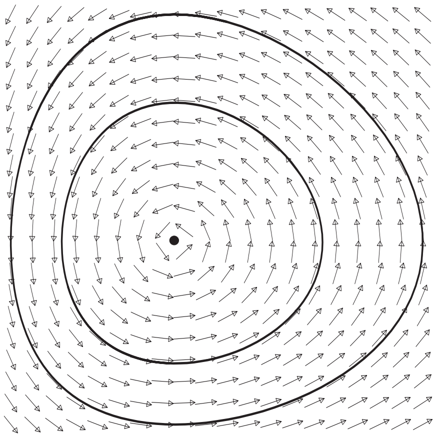
$$p = 1 + \frac{a - c}{2} \tag{2.15}$$

Definition. *Sei V ein Vektorfeld und sei K ein kritischer Punkt von V. K wird als* DEGENERIERTER KRITISCHER PUNKT *bezeichnet, g.d.w. die Vektoren in einer ϵ-Umgebung von K nicht ihre Richtung ändern.*[2]

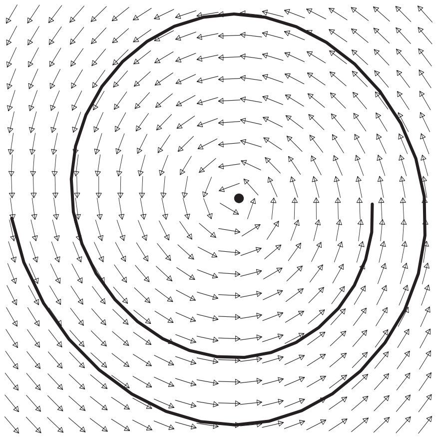
Degenerierte kritische Punkte werden von den weiteren Betrachtungen in dieser Arbeit ausgeschlossen. Im Zusammenhang mit dem Index eines kritischen

[1] Anmerkung: Es existieren bereits Methoden, kritische Punkte im 2D mit beliebigem Index zu konstruieren, jedoch nicht mit exakter Topologie ([SHK+97]).

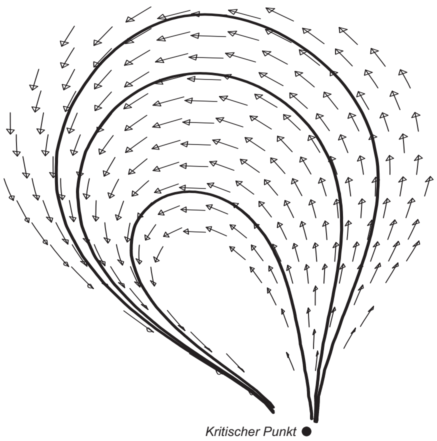
[2] Ein Beispiel für ein Vektorfeld mit degeneriertem kritischen Punkt wäre $V_{2D} = (|x|, |y|)^T$ bzw. $V_{3D} = (|x|, |y|, |z|)^T$



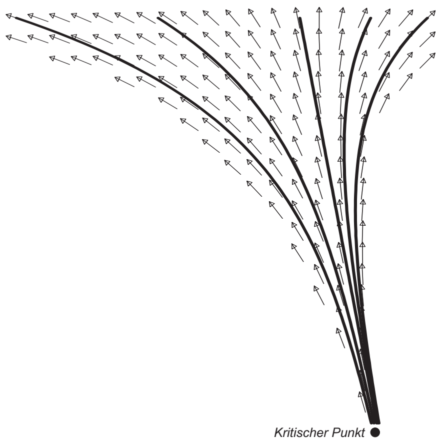
(a) 2D-Center



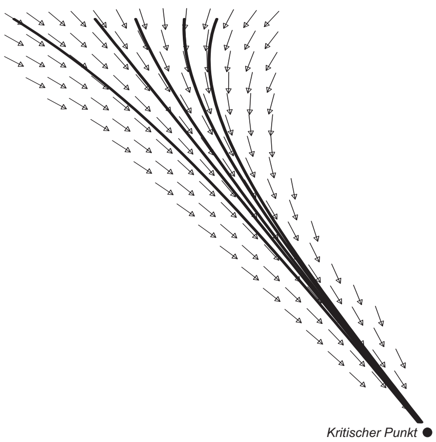
(b) 2D-Focus



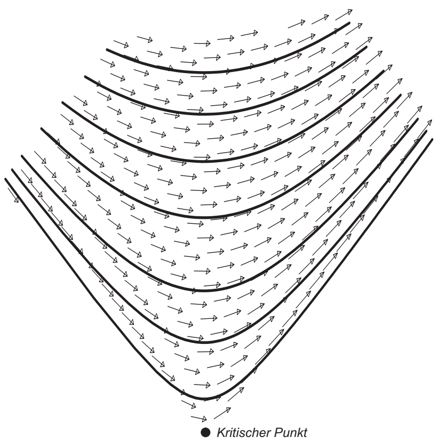
(c) 2D-Elliptischer Sektor



(d) 2D-Parabolischer Sektor 1



(e) 2D-Parabolischer Sektor 2



(f) 2D-Hyperbolischer Sektor

Abbildung 2.1: 2D-Topologien.

Punktes kann man sagen, dass alle Punkte mit Index $p \neq 0$ nicht degeneriert sind.

James Helman und Lambertus Hesselink ist es gelungen, mittels einer simplen Methode für eine bestimmte Klasse von 2D-Vektorfeldern die Topologie eindeutig zu bestimmen ([HH89]). Hierzu muss das Vektorfeld (zumindest in der Umgebung des zu untersuchenden kritischen Punktes) durch eine Taylor-Expansion 1. Ordnung beschrieben werden können. Somit kann am kritischen Punkt (x_0, y_0) die Jacobi Matrix aufgestellt werden:

$$J_{2D}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \tag{2.16}$$

Wenn die Determinante der Jacobi Matrix im kritischen Punkt 0 wird, so ist das Vektorfeld an dieser Stelle eben *nicht* mit einer Taylor-Expansion 1. Ordnung hinreichend beschrieben, oder es handelt sich um einen degenerierten kritischen Punkt.

Eine Klassifikation der einfachen kritischen Punkte erfolgt klassischerweise nach [HH89] mittels der reelen und imaginären Eigenwertkomponenten der Jacobi Matrix. In [LBH98] und [Lav98] wird gezeigt, dass das Wertepaar (α, β) genügt, um eine Klassifikation durchzuführen. Die Werte α und β werden wie folgt berechnet:

$$\alpha = \frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}} \tag{2.17}$$

$$\beta = \frac{\beta'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}} \tag{2.18}$$

$$\alpha' = P \tag{2.19}$$

$$\beta' = \operatorname{sgn}(P^2 - 4Q)\sqrt{|(P^2 - 4Q|} \tag{2.20}$$

$$P = -\operatorname{trace}(J) = -(u_x + v_y) \tag{2.21}$$

$$Q = \det(J) \tag{2.22}$$

Einen Überblick über die somit klassifizierten kritischen Punkte und deren grundlegendes Aussehen bietet Abbildung 2.2. In Tabelle 2.1 wird die Klassifizierung mathematisch exakt aufgelistet. Es sei angemerkt, dass als Oberbegriff für die verschiedenen 2D-Topologien die Bezeichnung PHASE PORTRAIT geläufig ist.

Die Klassifikation kritischer Punkte für einfache 3D-Vektorfelder, die durch eine Taylor-Expansion 1. Ordnung beschrieben werden können, basiert auf dem 2D-Fall. Zunächst wird die Jacobi Matrix am kritischen Punkt (x_0, y_0, z_0) aufgestellt:

$$J_{3D}(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)} \tag{2.23}$$

Entsprechend dem 2D-Fall wird ein degenerierter kritischer Punkt bzw. eine ungenügende Taylor-Expansion durch $\det[J_{3D}(x_0, y_0, z_0)] = 0$ angezeigt. Einige solcher Fälle lassen sich auf einen nicht-degenerierten 2D-Fall zurückführen.

Die Jacobi Matrix besitzt maximal 3 verschiedene Eigenwerte und Eigenvektoren. In [Rey64] und [CPC90] wird gezeigt, dass die somit definierten Eigenebenen die fundamentalen Lösungstrajektorien darstellen. In diesen Eigenebenen

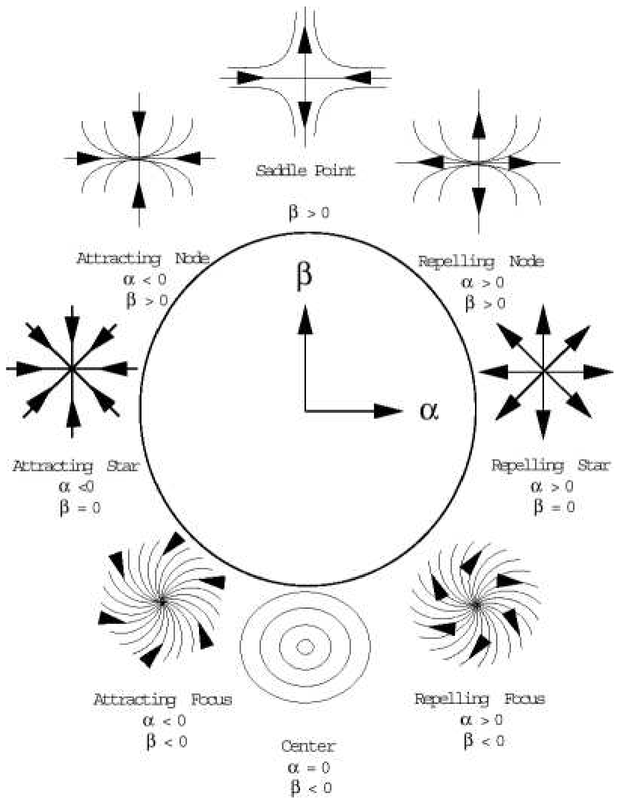


Abbildung 2.2: Topologien einfacher kritischer Punkte von 2D-Vektorfeldern. Leicht verändert aus [BH98].

α	β	Bedingung	Phase Portrait	Abkürzung
> 0	< 0		Repelling Focus	RF
> 0	$= 0$		Repelling Star	RS
> 0	> 0	$\|\beta\| < \|\alpha\|$	Repelling Node	RN
—	> 0	$\|\beta\| > \|\alpha\|$	Saddle	S
< 0	> 0	$\|\beta\| < \|\alpha\|$	Attracting Node	AN
< 0	$= 0$		Attracting Star	AS
< 0	< 0		Attracting Focus	AF
$= 0$	< 0		Center	C

Tabelle 2.1: Klassifikation simpler kritischer Punkte im 2D mittels (α, β) Wertepaaren. Nach [BH98].

wird der Fluss des Vektorfeldes quasi zweidimensional[3] und kann mittels der bekannten 2D-Klassifikation eingestuft werden. Ein simpler kritischer Punkt eines 3D-Vektorfeldes wird also durch eine Menge von 3 (α, β) Wertepaaren definiert, die ihrerseits jeweils eindeutig zu einem aus dem 2D bekannten Phase Portrait zugeordnet werden können. Um die Klassifikation zu vereinfachen, wird die Jacobi Matrix in eine kanonische Form gebracht, was die Eigenwerte nicht verändert, da diese invariant gegenüber Skalierung, Translation und Rotation sind.[4] Philippou and Strickland bestimmen in [PS97] 7 grundlegende kanonische Formen bzw. Klassen. Einen vollständigen Überblick über diese Einteilung bietet Tabelle 2.2 auf den Seiten 19 und 20.

Für allgemeine 3D-Vektorfelder ist weder eine Klassifizierung noch eine Methode bekannt, einem kritischen Punkt einen Index analog zum 2D-Fall zuzuordnen.

[3] Erklärendes Beispiel: Gegeben sei ein Vektorfeld $V = (a \cdot x, b \cdot y, c \cdot z)^T$ mit $a \neq b \neq c$. Die 3 Eigenvektoren verlaufen jeweils entlang der x-, y- und z-Achse. Somit sind als Eigenebenen die Koordinatenebenen (xy, xz und yz) definiert. Man stelle sich nun beispielsweise den Fluss des Vektorfeldes in der xy-Ebene vor. Die z-Komponente aller dortigen Vektoren ist 0. Somit reduziert sich die Bestimmung der Topologie in dieser Ebene auf den bekannten 2D-Fall, da auch der Fluss des Vektorfeldes in dieser Eigenebene durchgängig zweidimensional ist. Gleiches gilt für die anderen beiden Eigenebenen. Für einen allgemeinen Beweis sei auf die angegebene Literatur verwiesen.

[4] Man beachte jedoch, dass sich i.a. mit der Überführung in die kanonische Form die Eigen*vektoren* ändern, was aber keinen Einfluss auf die Klassifikation hat.

Tabelle 2.2: Klassifikation simpler kritischer Punkte im 3D mittels 3 (α, β) Wertepaaren. Für die Phase Portraits werden die Abkürzungen aus Tabelle 2.1 verwendet. Nach [BH98].

Klasse	Kanonische Form	Kommentar	Phase Portraits	$\|\alpha\|$	$\|\beta\|$
1	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$	3 reelle und voneinander verschiedene Eigenwerte; ebenso 3 linear unabhängige Eigenvektoren.	{AN, AN, AN} {RN, RN, RN} {AN, S, S} {RN, S, S}	$\alpha_1 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}}$ $\alpha_2 = \frac{\lambda_1+\lambda_3}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_3^2)}}$ $\alpha_3 = \frac{\lambda_2+\lambda_3}{\sqrt{2(\lambda_2^2+\lambda_3^2)}}$	$\beta_1 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_2\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}}$ $\beta_2 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_3\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_3^2)}}$ $\beta_3 = \frac{\|\lambda_2-\lambda_3\|}{\sqrt{2(\lambda_2^2+\lambda_3^2)}}$
$\star$	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Degenerierter 2D-Fall $(\det(J_{3D}) = 0)$. Eine Lösung findet sich nur in der durch die Eigenvektoren von λ_1 und λ_2 aufgespannten Eigenebene.	AN RN S	$\alpha_1 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}}$ $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = 0$	$\beta_1 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_2\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}}$ $\beta_2 = 0$ $\beta_3 = 0$
2	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$	Zwei reelle, voneinander verschiedene Eigenwerte, einer davon mit zweifacher Multiplizität. 3 linear unabhängige Eigenvektoren.	{AS, AN, AN} {RS, RN, RN} {AS, S, S} {RS, S, S}	$\alpha_1 = \frac{\lambda_1+\lambda_1}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = \pm 1$ $\alpha_2 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}}$ $\alpha_3 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}}$	$\beta_1 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_1\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = 0$ $\beta_2 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_2\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}}$ $\beta_3 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_2\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}}$
$\star$	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Degenerierter 2D-Fall $(\det(J_{3D}) = 0)$. Eine Lösung findet sich nur in der durch die 2 Eigenvektoren von λ_1 aufgespannten Eigenebene.	AS RS	$\alpha_1 = \frac{\lambda_1+\lambda_1}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = \pm 1$ $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = 0$	$\beta_1 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_1\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = 0$ $\beta_2 = 0$ $\beta_3 = 0$
$\star$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$	Degenerierter 1D-Fall $(\det(J_{3D}) = 0)$. Alle Tangentenkurven sind parallele Geraden zum Eigenvektor von λ_2.	—	—	—

Fortsetzung auf der nächsten Seite...

...Fortsetzung

Klasse	Kanonische Form	Kommentar	Phase Portraits	$\|\alpha\|$	$\|\beta\|$
3	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$	Zwei reelle, voneinander verschiedene Eigenwerte, einer davon mit zweifacher Multiplizität. 2 linear unabhängige Eigenvektoren.	{ALogS, AN} {RLogS, RN} {ALogS, S} {RLogS, S}	$\alpha_1 = \frac{\lambda_1+\lambda_1}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = \pm 1$ $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}}$	$\beta_1 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_1\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = 0$ $\beta_2 = 0$ $\beta_3 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_2\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}}$
$\star$	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Degenerierter 2D-Fall ($\det(J_{3D}) = 0$).	ALogS RLogS	$\alpha_1 = \frac{\lambda_1+\lambda_1}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = \pm 1$ $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = 0$	$\beta_1 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_1\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = 0$ $\beta_2 = 0$ $\beta_3 = 0$
$\star$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$	Degenerierter 1D-Fall ($\det(J_{3D}) = 0$).	—	—	—
4	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$	Ein reeller Eigenwert mit dreifacher Multiplizität. 3 linear unabhängige Eigenvektoren.	{AS, AS, AS} {RS, RS, RS}	$\alpha_1 = \frac{\lambda_1+\lambda_1}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = \pm 1$ $\alpha_2 = \frac{\lambda_1+\lambda_1}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = \pm 1$ $\alpha_3 = \frac{\lambda_1+\lambda_1}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = \pm 1$	$\beta_1 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_1\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = 0$ $\beta_2 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_1\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = 0$ $\beta_3 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_1\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = 0$
5	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$	Ein reeller Eigenwert mit dreifacher Multiplizität. 2 linear unabhängige Eigenvektoren.	{ALogS, AS} {RLogS, RS}	$\alpha_1 = \frac{\lambda_1+\lambda_1}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = \pm 1$ $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = \frac{\lambda_1+\lambda_1}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = \pm 1$	$\beta_1 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_1\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = 0$ $\beta_2 = 0$ $\beta_3 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_1\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = 0$
6	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$	Ein reeller Eigenwert mit dreifacher Multiplizität. 1 Eigenvektor.	ALogS RLogS	$\alpha_1 = \frac{\lambda_1+\lambda_1}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = \pm 1$ $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = 0$	$\beta_1 = \frac{\|\lambda_1-\lambda_1\|}{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_1^2)}} = 0$ $\beta_2 = 0$ $\beta_3 = 0$
7	$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$	Zwei konjugiert komplexe ($\beta < 0$) und ein reeller Eigenwert. 3 linear unabhängige Eigenvektoren. Es bildet sich nur ein Phase Portrait in der zum Eigenvektor von λ_3 senkrechten Ebene.	AF RF C	$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = 0$	$\beta_1 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ $\beta_2 = 0$ $\beta_3 = 0$

Es gelte $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$. Weiterhin sei angemerkt, dass es sich bei den mit $\star$ gekennzeichneten Fällen nicht um kritische Punkte entsprechend der vorgestellten Definition handelt, da hier eine Isolation innerhalb einer ϵ-Umgebung nicht vorliegt. Es bilden sich kritische Linien oder gar Flächen aus.

2.3 Ableitungen der Tangentenkurven

Tangentenkurven sind ein wichtiges Mittel zur Untersuchung der Eigenschaften eines Vektorfeldes. Um bestimmte Charakteristika der Tangentenkurven wie deren Krümmung oder Torsion zu untersuchen, ist es notwendig, die Ableitungen dieser Kurven zu bestimmen. Dies soll in diesem Abschnitt geschehen.

Lemma 1. *Sei V ein 3D-Vektorfeld, $L(t)$ eine beliebige Tangentenkurve in V und sei $P \in L$ ein beliebiger Punkt auf L. Weiterhin sei $L(t)$ derart parametrisiert, dass $P = L(t_0)$ und (entsprechend der Definition für Tangentenkurven) $\dot{L}(t_0) = V(L(t_0))$. Hierbei ist $\dot{L}(t)$ der 1. Ableitungsvektor (Tangentenvektor) der Kurve L bei t. Dann folgt für den n-ten Ableitungsvektor von L $(n > 1)$:*

$$\overset{n}{L}(t_0) = (u \cdot \overset{n-1}{L_x} + v \cdot \overset{n-1}{L_y} + w \cdot \overset{n-1}{L_z})(P) \tag{2.24}$$

Beweis. Es gilt:

$$\overset{n}{L} = \frac{d\overset{n-1}{L}}{dt}$$

Um die trivariate Funktion $\overset{n-1}{L}$ zu differenzieren, wird die verallgemeinerte Kettenregel angewandt. Weiterhin beachte man (2.1), (2.2) und (2.3):

$$\begin{aligned}
\overset{n}{L} = \frac{d\overset{n-1}{L}}{dt} &= \frac{\overset{n-1}{L}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\overset{n-1}{L}}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\overset{n-1}{L}}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \\
&= \overset{n-1}{L_x} \cdot \frac{dx}{dt} + \overset{n-1}{L_y} \cdot \frac{dy}{dt} + \overset{n-1}{L_z} \cdot \frac{dz}{dt} \\
&= u \cdot \overset{n-1}{L_x} + v \cdot \overset{n-1}{L_y} + w \cdot \overset{n-1}{L_z}
\end{aligned}$$

□

Holger Theisel hat Lemma 1 bereits in [The95] für 2D-Vektorfelder und den zweiten Ableitungsvektor der Tangentenkurve nachgewiesen. Das hier präsentierte Lemma 1 ist lediglich eine Verallgemeinerung.

Obwohl die Tangentenkurven eines allgemeinen Vektorfeldes i.a. nicht geschlossen analytisch beschrieben werden können, ist es mit Hilfe von Lemma 1 möglich, die Ableitungen der Tangentenkurven eindeutig aus den partiellen Ableitungen des Vektorfeldes zu bestimmen.

Im folgenden seien die expliziten Formeln für den zweiten und dritten Ableitungsvektor der Tangentenkurven eines beliebigen 3D-Vektorfeldes angegeben, da diese in anderen Teilen dieser Arbeit Verwendung finden:[5]

$$\begin{aligned} \ddot{L} &= u \cdot \dot{L}_x + v \cdot \dot{L}_y + w \cdot \dot{L}_z \\ &= u \cdot V_x + v \cdot V_y + w \cdot V_z \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} \dddot{L} &= u \cdot \ddot{L}_x + v \cdot \ddot{L}_y + w \cdot \ddot{L}_z \\ &= u \cdot (u_x \cdot V_x + u \cdot V_{xx} + v_x \cdot V_y + v \cdot V_{yx} + w_x \cdot V_z + w \cdot V_{zx}) \\ &\quad + v \cdot (u_y \cdot V_x + u \cdot V_{xy} + v_y \cdot V_y + v \cdot V_{yy} + w_y \cdot V_z + w \cdot V_{zy}) \\ &\quad + w \cdot (u_z \cdot V_x + u \cdot V_{xz} + v_z \cdot V_y + v \cdot V_{yz} + w_z \cdot V_z + w \cdot V_{zz}) \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.4 Normalenflächen und ihre Grundgrößen

Definition. *Eine Fläche $S \subseteq \mathbb{E}^3$ wird als* NORMALENFLÄCHE *eines 3D-Vektorfeldes V bezeichnet, wenn für alle Punkte $P \in S$ der Normalenvektor der Fläche in diesem Punkt die gleiche Richtung hat wie der Vektor $V(P)$.*

Die Definition der Normalenflächen[6] folgt der für die Tangentenkurven und bildet eine dazu senkrechte Komponente, denn die Tangentenkurven stoßen in jedem Punkt einer Normalenfläche senkrecht durch diese hindurch. Aufgrund der eindeutigen Richtungsinformation in allen unkritischen Punkten eines Vektorfeldes können sich die Normalenflächen weder schneiden noch berühren. Demnach existiert auch nur eine dieser Flächen in einem bestimmten unkritischen Punkt. Diese Eigenschaften teilen die Normalenflächen mit den Tangentenkurven und es wird u.a. im Laufe dieser Arbeit zu untersuchen sein, ob auch sie ein probates Mittel zur Untersuchung der Topologie von Vektorfeldern sind.

Um die Eigenschaften der Normalenflächen untersuchen zu können, müssen zunächst einige ihrer mathematischen Grundelemente beschrieben werden. Dabei handelt es sich zunächst um die Vektoren, die in jedem Punkt P_0 der Fläche S die Tangentialebene aufspannen. Da durch das Vektorfeld der Normalenvektor $(u, v, w)^T$ gegeben ist, lassen sich leicht zwei dazu senkrechte und voneinander linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a_0}$ und $\mathbf{b_0}$ mit dieser Eigenschaft finden. Hierzu wird der Normalenvektor in zwei senkrecht aufeinander stehende Ebenen (z.B. die xy- und yz-Ebene) projeziert und innerhalb dieser jeweiligen Ebene der zur Projektion orthogonale, normierte Vektor gesucht:

$$\mathbf{a_0} = \begin{pmatrix} \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-w}{\sqrt{v^2+w^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{v^2+w^2}} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Die Tangentialvektoren $\mathbf{a_0}$ und $\mathbf{b_0}$ entsprechen den ersten gerichteten Ableitungen der (in diesem Falle nur implizit gegebenen) Flächenfunktion über dem Parametergebiet der Fläche. Aus $\mathbf{a_0}$ und $\mathbf{b_0}$ ergeben sich nach Gauß die drei wichtigen Grundgrößen $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ der inneren Geometrie der Flächen

[5] Man beachte bei der Prüfung der Gleichungen die Definition für Tangentenkurven, wie sie auch in Lemma 1 referenziert wird: $\dot{L} = V$

[6] Holger Theisel schlug bereits in [The95] die Verwendung von Normalenflächen als 3D-Analogon zu den senkrechten 2D-Vektorfeldern vor.

([Gel86]):

$$\mathcal{E} = \mathbf{a_0} \cdot \mathbf{a_0} = 1 \tag{2.28}$$

$$\mathcal{F} = \mathbf{a_0} \cdot \mathbf{b_0} = -\frac{u \cdot w}{\sqrt{u^2 + v^2} \cdot \sqrt{v^2 + w^2}} \tag{2.29}$$

$$\mathcal{G} = \mathbf{b_0} \cdot \mathbf{b_0} = 1 \tag{2.30}$$

Aus den zweiten Ableitungen der Flächenfunktion und dem Normalenvektor in P_0 ergeben sich nach Gauß die drei Grundgrößen $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ und $\mathcal{D}''$ der Fläche, die die zweite Grundform der Fläche (im wesentlichen die Normalkrümmung einer Kurve K auf der Fläche S durch den Punkt P_0) bestimmen ([Gel86]):

$$\mathcal{D} = -\frac{-u \cdot v \cdot v_x + u^2 \cdot v_y + v^2 \cdot u_x - v \cdot u \cdot u_y}{(u^2 + v^2) \cdot \|V(P_0)\|} \tag{2.31}$$

$$\mathcal{D}' = -\frac{v \cdot w \cdot (u_y + v_x) - 2 \cdot u \cdot w \cdot v_y - v^2 \cdot (u_z + w_x) + u \cdot v \cdot (v_z + w_y)}{2 \cdot \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \sqrt{v^2 + w^2} \cdot \|V(P_0)\|} \tag{2.32}$$

$$\mathcal{D}'' = -\frac{-v \cdot w \cdot w_y + v^2 \cdot w_z + w^2 \cdot v_y - w \cdot v \cdot v_z}{(v^2 + w^2) \cdot \|V(P_0)\|} \tag{2.33}$$

2.5 Spezielle Vektorfelder

Die Eigenschaften spezieller Vektorfelder, die mittels ihrer Definition bestimmten Einschränkungen unterworfen sind, kann man zumeist wesentlich einfacher beschreiben. Weiterhin lassen sich hier oft Aussagen von hohem Wert tätigen, die für allgemeine Vektorfelder keine Gültigkeit haben. In praktischen Anwendungen werden insbesondere lineare und trilineare 3D-Vektorfelder benutzt. Deren Eigenschaften sollen in diesem Abschnitt kurz aufgezeigt werden.

2.5.1 Lineare Vektorfelder

Definition. *Seien* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4} \in \mathbb{R}^3$ *beliebige Vektorkonstanten.*[7] *Ein lineares 3D-Vektorfeld* V^ℓ *wird definiert durch:*

$$V^\ell(x, y, z) = \mathbf{v_1} \cdot x + \mathbf{v_2} \cdot y + \mathbf{v_3} \cdot z + \mathbf{v_4} \tag{2.34}$$

Mittels einer simplen Translation[8] ist es möglich, ein lineares Vektorfeld ohne die Konstante $\mathbf{v}_4$ zu schreiben:

$$V^\ell(x, y, z) = \mathbf{v_1} \cdot \hat{x} + \mathbf{v_2} \cdot \hat{y} + \mathbf{v_3} \cdot \hat{z} \tag{2.35}$$

Der Einfachheit halber werden im folgenden nur lineare Vektorfelder nach (2.35) betrachtet.

[7] Es sei angemerkt, dass konstante Vektoren im Rahmen dieser Arbeit mit kleinen, fett gedruckten Buchstaben notiert werden (z.B. $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$), während Vektorfelder mit großen, normal gedruckten Buchstaben bezeichnet werden, da es sich hierbei um Funktionen handelt (z.B. $V : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}^3$). Handelt es sich bei einer Funktion V_x^ℓ um eine konstante Funktion, so ist die Schreibweise $V_x^\ell = \mathbf{a}$ gerechtfertigt.

[8] Translation und Rotation in $\mathbb{E}^3$ beeinflussen die Topologie eines Vektorfeldes nicht.

Sind die Vektorkonstanten $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ und $\mathbf{v_3}$ linear unabhängig, so bilden sie eine Basis für $\mathbb{R}^3$, und nur die Triviallösung ($x = y = z = 0$) erfüllt die Gleichung zur Bestimmung der kritischen Punkte:

$$\mathbf{0} = \mathbf{v_1} \cdot x + \mathbf{v_2} \cdot y + \mathbf{v_3} \cdot z \tag{2.36}$$

Somit haben lineare Vektorfelder mit linear unabhängigen Vektorkonstanten genau einen kritischen Punkt im Koordinatenursprung.

Bei linear abhängigen Vektorkonstanten kommt es zur Ausprägung von kritischen Linien oder Ebenen; geschlossenen Bereichen also, in denen alle Vektoren $\mathbf{0}$ sind. Solche kritischen Punkte sind degeneriert.

Die Topologie des kritischen Punktes kann mittels der Jacobi Matrix ermittelt werden. Da die partiellen Ableitungen 1. Ordnung den Vektorkonstanten $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ und $\mathbf{v_3}$ entsprechen (höhere Ableitungen sind konstant $\mathbf{0}$), folgt für die Jacobi Matrix:

$$J^{\ell}_{3D} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]^T \tag{2.37}$$

Für lineare Vektorfelder kann man zeigen, dass ein kritischer Punkt degeneriert ist, g.d.w. die Determinante der Jacobi Matrix $\det(J^{\ell}_{3D}) = 0$ (siehe [The95] für einen Beweis). Dies wiederum ist nur dann der Fall, wenn die Vektorkonstanten linear abhängig sind, wie es bereits oben beschrieben wurde.

2.5.2 Trilineare Vektorfelder

Definition. *Seien* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}, \mathbf{v_5}, \mathbf{v_6}, \mathbf{v_7}, \mathbf{v_8} \in \mathbb{R}^3$ *beliebige Vektorkonstanten. Ein trilineares 3D-Vektorfeld* V^t *wird definiert durch:*

$$V^t(x,y,z) = \mathbf{v_1} \cdot x + \mathbf{v_2} \cdot y + \mathbf{v_3} \cdot z + \mathbf{v_4} \cdot xy + \mathbf{v_5} \cdot xz + \mathbf{v_6} \cdot yz + \mathbf{v_7} \cdot xyz + \mathbf{v_8} \tag{2.38}$$

Die Menge der linearen Vektorfelder ist eine Teilmenge der trilinearen Vektorfelder; man setze dazu einfach in (2.38) $\mathbf{v}_4 = \ldots = \mathbf{v}_7 = \mathbf{0}$.

In einem trilinearen Vektorfeld können maximal 6 kritische Punkte auftreten. Polynome 6. Grades können nicht mehr analytisch, sondern nur noch numerisch gelöst werden. Zur Untersuchung der Topologie eines kritischen Punktes kann wieder die Jacobi Matrix in diesem Punkt genutzt werden (wenn $\det(J^t_{3D}) \neq 0$) benutzt werden:

$$J^t_{3D} = \begin{bmatrix} V^t_x & V^t_y & V^t_z \end{bmatrix}^T \tag{2.39}$$

Hierbei sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} V^t_x &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4 \cdot y + \mathbf{v}_5 \cdot z + \mathbf{v}_7 \cdot yz && (2.40) \\ V^t_y &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 \cdot x + \mathbf{v}_6 \cdot z + \mathbf{v}_7 \cdot xz && (2.41) \\ V^t_z &= \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_5 \cdot x + \mathbf{v}_6 \cdot y + \mathbf{v}_7 \cdot xy && (2.42) \end{aligned}$$

In der Praxis werden oft stückweise trilinear interpolierte Vektorfelder benutzt, da bestimmte Daten nicht kontinuierlich erhoben, sondern nur an Gitterpunkten gemessen werden können. In der diese Arbeit begleitenden Implementation wurde dieses Konzept umgesetzt. Deswegen sollen im folgenden die notwendigen Definitionen dafür gegeben werden.

Definition. *Seien* $(x_{min}, y_{min}, z_{min})$ *und* $(x_{max}, y_{max}, z_{max})$ *zwei Punkte in* $\mathbb{E}^3$ *für die gelte:*

$$x_{min} < x_{max} \qquad y_{min} < y_{max} \qquad z_{min} < z_{max}$$

Weiterhin gelte für $n, n_{max}, m, m_{max}, k, k_{max} \in \mathbb{N}$*:*

$$n < n_{max} > 1 \qquad m < m_{max} > 1 \qquad k < k_{max} > 1$$

Als REGULÄRES, GLEICHMÄSSIGES GITTER *bezeichnet man dann*

$$D_G := \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{E}^3 : \begin{array}{rcl} x & = & x_{min} + n \cdot x_{step} \;\; mit \;\; x_{step} = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{n_{max} - 1} \\ y & = & y_{min} + m \cdot y_{step} \;\; mit \;\; y_{step} = \dfrac{y_{max} - y_{min}}{m_{max} - 1} \\ z & = & z_{min} + k \cdot z_{step} \;\; mit \;\; z_{step} = \dfrac{z_{max} - z_{min}}{k_{max} - 1} \end{array} \Big\}$$

D_G ist also eine endliche Punktmenge, wobei die Punkte in regelmäßigen Abständen innerhalb eines achsenparallelen Quaders angeordnet sind.

Definition. *Sei* D_G *ein reguläres, gleichmäßiges Gitter. Als* VEKTORDATENMENGE V_G AUF D_G *bezeichnet man dann eine Abbildung der Form*

$$V_G : D_G \to \mathbb{R}^3$$

Definition. *Sei* D_G *ein reguläres, gleichmäßiges Gitter und* V_G *eine Vektordatenmenge auf* D_G*. Weiterhin sei*

$$D := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{E}^3 : x_{min} \le x \le x_{max};\; y_{min} \le y \le y_{max};\; z_{min} \le z \le z_{max} \right\}$$

der durch die Definitionsgrenzen von D_G *aufgespannte Quader in* $\mathbb{E}^3$*. Seien* $G_0(x_0, y_0, z_0), G_1(x_1, y_1, z_1) \in D_G$ *zwei benachbarte Punkte des Gitters für die gilt*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_{step} \\ y_0 + y_{step} \\ z_0 + z_{step} \end{pmatrix}$$

Als STÜCKWEISE TRILINEAR INTERPOLIERTES VEKTORFELD *bezeichnet man dann*

$$\begin{aligned} V := \big\{ \mathbf{v}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v}(x,y,z) &= F_{G_0}^{G_1}(x,y,z) \; und \\ & (x,y,z) \in D \; mit \\ & x_0 \le x \le x_1 \quad y_0 \le y \le y_1 \quad z_0 \le z \le z_1 \big\} \end{aligned}$$

Hierbei ist $F_{G_0}^{G_1}$ die Formel der trilinearen Interpolation:[9]

$$
\begin{aligned}
&F_{G_0}^{G_1}(x,y,z) = \\
&\quad \frac{x_1 - x}{x_{step}} \cdot \frac{y_1 - y}{y_{step}} \cdot \frac{z_1 - z}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{x_1 - x}{x_{step}} \cdot \frac{y_1 - y}{y_{step}} \cdot \frac{z - z_0}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{x_1 - x}{x_{step}} \cdot \frac{y - y_0}{y_{step}} \cdot \frac{z_1 - z}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_1 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{x_1 - x}{x_{step}} \cdot \frac{y - y_0}{y_{step}} \cdot \frac{z - z_0}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{x - x_0}{x_{step}} \cdot \frac{y_1 - y}{y_{step}} \cdot \frac{z_1 - z}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{x - x_0}{x_{step}} \cdot \frac{y_1 - y}{y_{step}} \cdot \frac{z - z_0}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{x - x_0}{x_{step}} \cdot \frac{y - y_0}{y_{step}} \cdot \frac{z_1 - z}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{x - x_0}{x_{step}} \cdot \frac{y - y_0}{y_{step}} \cdot \frac{z - z_0}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

Die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $F_{G_0}^{G_1}$ sowie die daraus resultierenden Ableitungen der Tangentenkurven finden sich im Anhang A.

[9] $\frac{x_1 - x}{x_{step}}$ evaluiert zu $(1 - x)$ und $\frac{x - x_0}{x_{step}}$ zu x für $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und daraus resultierend $x_{step} = 1$.

Kapitel 3

Skalare eines Vektorfeldes und ihre Eigenschaften

Definition. *Sei $\mathbb{E}^3$ der 3-dimensionale, euklidische Raum, in dem ein kartesisches Koordinatensystem definiert sei. Weiterhin sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Ein* 3-DIMENSIONALES SKALARFELD *ist nunmehr eine Abbildung der Form:*

$$S : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

In diesem Kapitel werden vier verschiedene Skalarfelder vorgestellt, die bestimmte Eigenschaften eines Vektorfeldes beschreiben und Aufschluss über dessen Topologie geben sollen. Dazu wird das Verhalten dieser Skalarfelder in der Nähe kritischer Punkte untersucht. Es sei angemerkt, dass dieses Verhalten nur für lineare Vektorfelder bewiesen wird, da aufgrund der hohen Komplexität solcher Beweise im 3D zum einen dem Autor ein allgemeiner Beweis noch nicht gelungen ist und zum anderen dies auch den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen würde. Jedoch werden Hinweise zum Verhalten der Skalarfelder in der Nähe kritischer Punkte allgemeiner Vektorfelder gegeben.

Vier Vektorfelder wurden ausgesucht, um einen vergleichbaren Eindruck von der Visualisierung ihrer Skalarfelder zu vermitteln, die jeweils am Ende eines jeden Abschnitts präsentiert wird. Genaue Angaben zu den Methoden der Visualisierung findet man im Kapitel 5. Die Definition und die topologischen Eigenschaften dieser Vektorfelder sollen als Referenz in Tabelle 3.1 angegeben sein.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels erfolgen vergleichende und zusammenfassende Betrachtungen zu den einzelnen Skalarfeldern.

3.1 Krümmung der Tangentenkurven

Die Krümmung einer Kurve ist ein Maß für die Abweichung der Kurve von ihrer eigenen Tangente und wird somit wesentlich vom zweiten Ableitungsvektor der Kurve bestimmt.[1] Eine Gerade hat demnach keine Krümmung, während

[1]Für eine auf die Bogenlänge s als Parameter bezogene Kurve K gilt sogar für die Krümmung: $\kappa(s) = ||\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{s})||$

Bezeichnung	**Definition**	**Topologische Beschreibung**
V_1^ℓ	$\begin{pmatrix} 3x \\ 2y \\ z \end{pmatrix}$	Lineares Vektorfeld mit einem kritischen Punkt der Klasse 1. $K = (0,0,0)$ mit Repelling Node Topologien in xy-, xz- und yz-Ebenen.
V_2^ℓ	$\begin{pmatrix} -3x \\ -2y \\ -z \end{pmatrix}$	Lineares Vektorfeld mit einem kritischen Punkt der Klasse 1. $K = (0,0,0)$ mit Attracting Node Topologien in xy-, xz- und yz-Ebenen. Inverses Vektorfeld zu V_1^ℓ.
V^q	$\begin{pmatrix} x \\ y^2 - 1 \\ z \end{pmatrix}$	Quadratisches Vektorfeld mit zwei kritischen Punkten der Klasse 2. $K_1 = (0,-1,0)$ mit Saddle in xy- und yz-; Repelling Star in xz-Ebene. $K_2 = (0,1,0)$ mit Repelling Node in xy- und yz-; Repelling Star in xz-Ebene.
V^t	$\begin{pmatrix} (x-\frac{1}{10})(y-\frac{4}{10})(z-\frac{7}{10}) \\ (x-\frac{2}{10})(y-\frac{5}{10})(z-\frac{8}{10}) \\ (x-\frac{3}{10})(y-\frac{6}{10})(z-\frac{9}{10}) \end{pmatrix}$	Trilineares Vektorfeld mit 6 kritischen Punkten. $K_1 = (\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10})$. $K_2 = (\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. $K_3 = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{9}{10})$. $K_4 = (\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5})$. $K_5 = (\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10})$. $K_6 = (\frac{3}{10}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10})$.

Tabelle 3.1: Referenzvektorfelder zur vergleichenden Visualisierung der Skalarfelder in den Abschnitten 3.1 bis 3.4.

die Krümmung auf einem Kreis konstant dem Reziproken des Kreisradius entspricht: Je kleiner der Kreis, desto höher die Krümmung.

Mittels Lemma 1 und (2.24) sind die Ableitungsvektoren in jedem Punkt $P = L(t_0)$ einer Tangentenkurve L bekannt. Somit gilt für die Krümmung der Kurve in diesem Punkt (siehe auch [Far92]):

$$\kappa(t_0) = \frac{\|\dot{L}(t_0) \times \ddot{L}(t_0)\|}{\|\dot{L}(t_0)\|^3} \tag{3.1}$$

Da durch jeden Punkt eines Vektorfeldes (bis auf kritische Punkte) genau eine Tangentenkurve führt, kann man mit (3.1) folgendes Skalarfeld definieren:

Definition. *Sei V ein Vektorfeld. Als* Krümmungsfeld $\kappa(V)$ *wird dann jenes Skalarfeld bezeichnet, welches in jedem Punkt des Vektorfeldes V die dortige Krümmung der durch diesen Punkt laufenden Tangentenkurve angibt. Nach* (2.25) *ergibt sich:*

$$\kappa(V) = \sqrt{\frac{p}{(u^2 + v^2 + w^2)^3}} \tag{3.2}$$

mit

$$\begin{aligned} p = {} & (v \cdot (u \cdot w_x + v \cdot w_y + w \cdot w_z) - w \cdot (u \cdot v_x + v \cdot v_y + w \cdot v_z))^2 \\ & + (w \cdot (u \cdot u_x + v \cdot u_y + w \cdot u_z) - u \cdot (u \cdot w_x + v \cdot w_y + w \cdot w_z))^2 \\ & + (u \cdot (u \cdot v_x + v \cdot v_y + w \cdot v_z) - v \cdot (u \cdot u_x + v \cdot u_y + w \cdot u_z))^2 \end{aligned}$$

In einem kritischen Punkt ist $\kappa(V)$ nicht definiert. Wie man an (3.2) erkennt, ist die Krümmung der Tangentenkurven im 3D nicht vorzeichenbehaftet.[2] Es gilt also:

$$\kappa(V) \geq 0$$

Weiterhin ergibt sich aus der Definition der Krümmung, dass $\kappa(V) = 0$ nur dann gelten kann, wenn es sich bei den Tangentenkurven zumindest lokal um Geraden handelt. In allen anderen Fällen gilt $\kappa(V) > 0$.

Um das Verhalten der Krümmung in der Nähe eines kritischen Punktes zu untersuchen, stelle man sich nun einen beliebigen Strahl vor, der seinen Anfang im kritischen Punkt selbst hat. Betrachtet man die Krümmungswerte entlang dieses Strahls, so lässt sich folgende, insbesondere für die Visualisierung des Krümmungsfeldes wichtige Aussage treffen.[3]

Satz 1. *Sei V^ℓ ein lineares Vektorfeld und sei K ein nicht degenerierter kritischer Punkt von V^ℓ. Für die Krümmungswerte der Tangentenkurven entlang eines beliebigen Strahls aus K gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

1. *Die Krümmungswerte sind Null entlang des gesamten Strahls (mit Ausnahme von K).*

2. *Wenn r den Abstand zu K auf dem Strahl angibt, dann gilt:*

$$\lim_{r \to 0+0} \kappa(V^\ell) = \lim_{r \to 0+0} \frac{1}{r} \to \infty$$

[2] Dies gilt im allgemeinen für beliebige Kurven im 3D.
[3] Wie bereits angemerkt, erfolgen die Betrachtungen nur für lineare Vektorfelder.

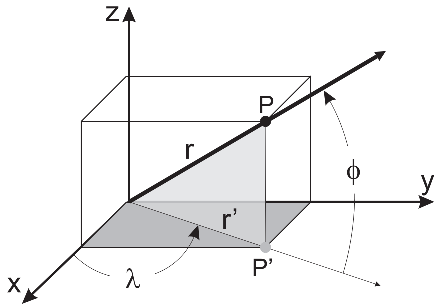


Abbildung 3.1: Koordinatentransformation mittels sphärischer Parallelkoordinaten.

Weiterhin sei $\mathbb{A}$ die Menge der Strahlen, für die Aussage 1 gilt, und $\mathbb{B}$ die der Aussage 2 zugehörigen Strahlen. Entspricht K der topologischen Einordnung nach der Klasse 4 (Tabelle 2.2 ab Seite 19), so gilt:

$$\mathbb{A} \neq \emptyset \qquad \mathbb{B} = \emptyset$$

Entspricht K jedoch jeder anderen Topologie, so gilt:

$$\mathbb{B} \neq \emptyset$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass Satz 1 für lineare Vektorfelder nach (2.35) gilt. V^ℓ kann mittels einer Taylor Expansion 1. Ordnung beschrieben werden:[4]

$$V^\ell(x, y, z) = V_x^\ell \cdot x + V_y^\ell \cdot y + V_z^\ell \cdot z \tag{3.3}$$

mit den Vektorkonstanten

$$V_x^\ell = \mathbf{a} = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \\ w_x \end{pmatrix} \qquad V_y^\ell = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \\ w_y \end{pmatrix} \qquad V_z^\ell = \mathbf{c} = \begin{pmatrix} u_z \\ v_z \\ w_z \end{pmatrix}$$

Da die Betrachtungen entlang eines Strahles mit Beginn in $(0, 0, 0)$ erfolgen, wird eine Koordinatentransformation mittels sphärischer Parallelkoordinaten vorgenommen (Abbildung 3.1):

$$V^\ell(r, \phi, \lambda) = r \cdot (\mathbf{a} \cdot \cos\phi \cdot \cos\lambda + \mathbf{b} \cdot \cos\phi \cdot \sin\lambda + \mathbf{c} \cdot \sin\phi) \tag{3.4}$$

Hierbei ist $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$ der Winkel, den der Strahl mit der xy-Ebene einschließt. Weiterhin bezeichnet λ den Winkel zwischen der Projektion des Strahls auf die xy-Ebene und der positiven Richtung der x-Achse; $0 \leq \lambda < 2\pi$. Für einen bestimmten Strahl sind die Winkel ϕ und λ konstant. Einzig der Radius r ist veränderlich und gibt die Position auf dem Strahl als Entfernung vom kritischen Punkt K an.

Der Beweis lässt sich nunmehr in 2 Fälle teilen. Zunächst muss untersucht werden, in welchen Fällen die Krümmung um den kritischen Punkt herum konstant Null ist. Für alle anderen Fälle muss dann bewiesen werden, dass sich

[4]Man beachte: $V^\ell(0, 0, 0) = \mathbf{0}$.

die Krümmung entlang des Strahls umgekehrt proportional zum Abstand vom kritischen Punkt verhält und somit divergiert.

Wie aus (3.1) zu erkennen ist, muss das Vektorprodukt aus $\dot{L}$ und $\ddot{L}$ den Nullvektor ergeben, damit $\kappa(V^\ell)$ konstant Null gilt. Hierzu werden zunächst komponentenweise die Formeln für das Vektorprodukt aufgestellt.

$$
\begin{aligned}
(\dot{L} \times \ddot{L})_u = -r^2 \cdot \big(& \\
& (w_x \cdot v_y \cdot v_x - v_x \cdot w_z \cdot w_x - v_x^2 \cdot w_y + w_x^2 \cdot v_z) \cdot (\cos\phi \cdot \cos\lambda)^2 \\
& +(-v_y \cdot w_z \cdot w_y - v_y \cdot w_x \cdot u_y + w_y \cdot v_x \cdot u_y + w_y^2 \cdot v_z) \cdot (\cos\phi \cdot \sin\lambda)^2 \\
& +(-v_z \cdot w_x \cdot u_z + w_z \cdot v_y \cdot v_z + w_z \cdot v_x \cdot u_z - v_z^2 \cdot w_y) \cdot (\sin\phi)^2 \\
& +(-v_x \cdot w_y \cdot v_y - v_x \cdot w_z \cdot w_y + 2 \cdot w_x \cdot v_z \cdot w_y + w_y \cdot v_x \cdot u_x \\
& \quad - v_y \cdot w_x \cdot u_x + w_x \cdot v_y^2 - v_y \cdot w_z \cdot w_x) \cdot (\cos^2\phi \cdot \cos\lambda \cdot \sin\lambda) \\
& +(w_z \cdot v_x \cdot u_x - 2 \cdot v_x \cdot w_y \cdot v_z + v_z \cdot w_z \cdot w_x + w_z \cdot v_y \cdot v_x \\
& \quad + w_x \cdot v_y \cdot v_z - v_x \cdot w_z^2 - v_z \cdot w_x \cdot u_x) \cdot (\cos\phi \cdot \cos\lambda \cdot \sin\phi) \\
& +(v_z \cdot w_z \cdot w_y + w_z \cdot v_y^2 - v_z \cdot w_x \cdot u_y - v_y \cdot w_z^2 + w_y \cdot v_x \cdot u_z \\
& \quad - v_y \cdot w_x \cdot u_z + w_z \cdot v_x \cdot u_y - v_y \cdot w_y \cdot v_z) \cdot (\cos\phi \cdot \sin\lambda \cdot \sin\phi)\big)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

$$
\begin{aligned}
(\dot{L} \times \ddot{L})_v = r^2 \cdot \big(& \\
& (w_x \cdot u_y \cdot v_x - w_x \cdot w_z \cdot u_x + w_x^2 \cdot u_z - w_y \cdot v_x \cdot u_x) \cdot (\cos\phi \cdot \cos\lambda)^2 \\
& +(w_y^2 \cdot u_z + w_y \cdot u_x \cdot u_y - u_y \cdot w_z \cdot w_y - u_y^2 \cdot w_x) \cdot (\cos\phi \cdot \sin\lambda)^2 \\
& +(w_z \cdot u_x \cdot u_z - u_z \cdot w_y \cdot v_z - u_z^2 \cdot w_x + w_z \cdot u_y \cdot v_z) \cdot (\sin\phi)^2 \\
& +(w_y \cdot u_x^2 + 2 \cdot w_x \cdot u_z \cdot w_y + v_y \cdot w_x \cdot u_y - w_x \cdot u_x \cdot u_y \\
& \quad - u_x \cdot w_z \cdot w_y - u_x \cdot w_y \cdot v_y - u_y \cdot w_z \cdot w_x) \cdot (\cos^2\phi \cdot \cos\lambda \cdot \sin\lambda) \\
& +(-w_x \cdot u_x \cdot u_z + v_z \cdot w_x \cdot u_y + w_z \cdot v_x \cdot u_y - w_y \cdot v_x \cdot u_z + u_x^2 \cdot w_z \\
& \quad + w_x \cdot u_z \cdot w_z - w_z^2 \cdot u_x - u_x \cdot w_y \cdot v_z) \cdot (\cos\phi \cdot \cos\lambda \cdot \sin\phi) \\
& +(w_y \cdot u_x \cdot u_z + w_y \cdot u_z \cdot w_z + w_z \cdot u_y \cdot v_y - v_y \cdot u_z \cdot w_y \\
& \quad - u_y \cdot w_z^2 + w_z \cdot u_x \cdot u_y - 2 \cdot u_y \cdot w_x \cdot u_z) \cdot (\cos\phi \cdot \sin\lambda \cdot \sin\phi)\big)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
(\dot{L} \times \ddot{L})_w = -r^2 \cdot \big(& \\
& (v_x^2 \cdot u_y - u_x \cdot v_y \cdot v_x - v_z \cdot w_x \cdot u_x + v_x \cdot u_z \cdot w_x) \cdot (\cos\phi \cdot \cos\lambda)^2 \\
& +(-u_y \cdot v_z \cdot w_y - u_y^2 \cdot v_x + v_y \cdot u_z \cdot w_y + v_y \cdot u_x \cdot u_y) \cdot (\cos\phi \cdot \sin\lambda)^2 \\
& +(-u_z \cdot v_y \cdot v_z + v_z \cdot u_x \cdot u_z + v_z^2 \cdot u_y - u_z^2 \cdot v_x) \cdot (\sin\phi)^2 \\
& +(u_y \cdot v_y \cdot v_x - u_x \cdot v_x \cdot u_y - u_x \cdot v_y^2 + v_y \cdot w_x \cdot u_z + v_y \cdot u_x^2 \\
& \quad - v_z \cdot w_x \cdot u_y - u_x \cdot w_y \cdot v_z + w_y \cdot v_x \cdot u_z) \cdot (\cos^2\phi \cdot \cos\lambda \cdot \sin\lambda) \\
& +(w_z \cdot v_x \cdot u_z - u_x \cdot v_x \cdot u_z + 2 \cdot v_x \cdot u_y \cdot v_z + v_z \cdot u_x^2 \\
& \quad - u_z \cdot v_y \cdot v_x - u_x \cdot v_z \cdot w_z - u_x \cdot v_y \cdot v_z) \cdot (\cos\phi \cdot \cos\lambda \cdot \sin\phi) \\
& +(u_y \cdot v_y \cdot v_z + v_y \cdot u_z \cdot w_z + v_y \cdot u_x \cdot u_z - 2 \cdot u_y \cdot v_x \cdot u_z \\
& \quad - w_z \cdot u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y^2 + v_z \cdot u_x \cdot u_y) \cdot (\cos\phi \cdot \sin\lambda \cdot \sin\phi)\big)
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Damit das Vektorprodukt für beliebige Winkel ϕ und λ den Nullvektor ergibt, müssen alle 18 Ableitungsterme vor den trigonometrischen Funktionen Null ergeben. Ein entsprechendes lineares Gleichungssystem liefert für **a**, **b** und **c** insgesamt 18 Lösungen. Überprüft man diese Lösungen jedoch mittels der Jacobi Matrix und wendet die im Abschnitt 2.5 gewonnenen Erkenntnisse über lineare Vektorfelder an, so handelt es sich nur bei einer Lösung um einen nicht degenerierten kritischen Punkt:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_x = v_y = w_z \neq 0 \\ u_y = u_z = v_x = v_z = w_x = w_y = 0 \end{array} \right\} \tag{3.8}$$

Dieses Ergebnis entspricht der topologischen Einordnung in Klasse 4; im gesamten Vektorfeld ist $\kappa(V^\ell) = 0$.

Für alle anderen Fälle bleibt noch die umgekehrt proportionale Divergenz des Krümmungsfeldes in der Nähe des kritischen Punktes zu beweisen. Hierzu führe man (3.1), (3.4), (3.5), (3.6) sowie (3.7) zusammen und separiere die konstanten Anteile (mit einem Index 'c' gekennzeichnet):

$$\kappa(V^\ell) = \frac{r^2 \cdot \sqrt{\left(\dot{L}_c \times \ddot{L}_c\right)_u^2 + \left(\dot{L}_c \times \ddot{L}_c\right)_v^2 + \left(\dot{L}_c \times \ddot{L}_c\right)_w^2}}{r^3 \cdot \left(\sqrt{\left(\dot{L}_c\right)_u^2 + \left(\dot{L}_c\right)_v^2 + \left(\dot{L}_c\right)_w^2}\right)^3} \tag{3.9}$$

$$\lim_{r \to 0+0} \kappa(V^\ell) = \lim_{r \to 0+0} \frac{1}{r} \to \infty \tag{3.10}$$

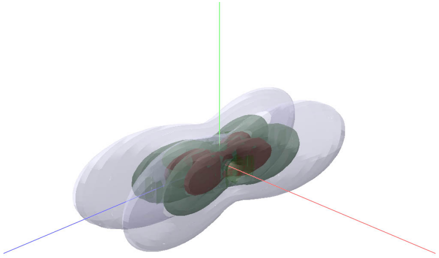
□

Satz 1[5] eröffnet die Möglichkeit der topologisch relevanten Visualisierung des Krümmungsfeldes (KRÜMMUNGSPLOT), da für die meisten Topologien $\kappa(V)$ in der Nähe eines kritischen Punktes und nur dort divergiert. Demnach ist die Visualisierung der Krümmung von Tangentenkurven ein probates Hilfsmittel zur visuellen Bestimmung der Lage von kritischen Punkten (Abbildung 3.2d).

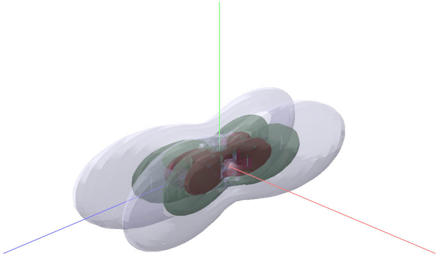
Die Praxis zeigt, dass die Isoflächen des Krümmungsfeldes entsprechend der Topologie des kritischen Punktes bestimmte geometrische Formen aufweisen, so dass aus dem Krümmungsplot gewisse Rückschlüsse auf die Topologie gezogen werden können (Abbildungen 3.2a und 3.2c). In den Kapiteln 4 und 6 werden hierzu genauere Aussagen gemacht, jedoch eine Aussage kann aus Satz 1 hierzu bereits abgeleitet werden: Da die Krümmung für kritische Punkte der Klasse 4 konstant Null ist, kann eine Unterscheidung zwischen den einzelnen Topologien dieser Klasse nicht erfolgen.

Weiterhin kann jedes beliebige Vektorfeld nicht hinreichend mittels der Krümmung der Tangentenkurven beschrieben werden, da die Krümmungsfelder zweier zueinander inverser Vektorfelder identisch sind. Dazu vergleiche man die Abbildungen 3.2a und 3.2b miteinander. Obwohl es sich um zwei verschiedene Vektorfelder (V_1^ℓ und V_2^ℓ) handelt, sind beide Krümmungsfelder identisch, da die Tangentenkurven von V_1^ℓ nur in entgegengesetzter Richtung zu denen von V_2^ℓ verlaufen (V_2^ℓ ist das inverse Vektorfeld zu V_1^ℓ und umgekehrt). Zur hinreichenden Beschreibung eines Vektorfeldes sind also weitere Skalarfelder notwendig.

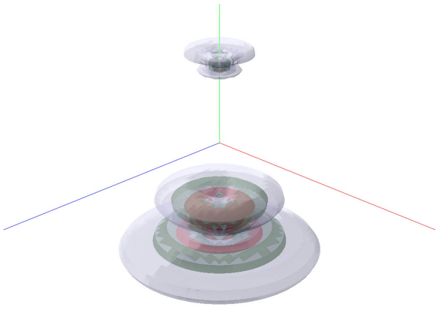
[5]In [The95] findet man einen Beweis, der die prinzipielle Divergenzaussage von Satz 1



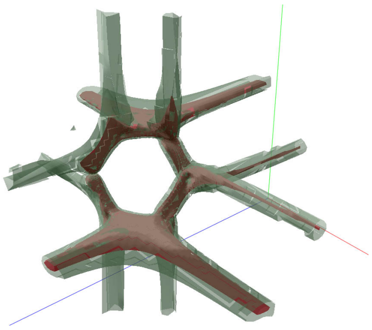
(a) V_1^ℓ



(b) V_2^ℓ



(c) V^q



(d) V^t

Abbildung 3.2: Krümmungsplots von 3D-Vektorfeldern. Die Strahlen geben die positiven Richtungen der Koordinatenachsen an (Rot $= x$, Grün $= y$, Blau $= z$). Zur Definition der Vektorfelder siehe Tabelle 3.1 auf Seite 28.

nicht nur für lineare, sondern auch für allgemeine 2D-Vektorfelder nachweist. Im 3D ist der allgemeine Beweis aufgrund sehr hoher Komplexität bisher noch nicht gelungen.

3.2 Torsion der Tangentenkurven

Man stelle sich eine Kurve K im 3D vor, die keine Gerade ist. Dann liegen auch 3 beliebige Punkte P_1, P_2 und P_3 dieser Kurve i.a. nicht auf einer Geraden und bestimmen somit eine Ebene. Lässt man diese 3 Punkte nunmehr auf der Kurve K gegen den Punkt $P_0 \in K$ konvergieren, so konvergiert die beschriebene Ebene gegen eine Ebene durch P_0. Diese Ebene wird als SCHMIEGEBENE S VON K IN P_0 bezeichnet. Die Existenz von S ist gesichert, wenn die ersten beiden Ableitungen des Ortsvektors in P_0 linear unabhängig sind. Der auf S im Punkt P_0 senkrecht stehende normierte Vektor wird BINORMALENVEKTOR $\mathbf{b}$ genannt. Die TORSION τ EINER KURVE K ist ein Maß für die Änderung dieses Binormalenvektors. Sie gibt also an, mit welcher „Stärke" sich die Kurve aus ihrer Schmiegebene herauswindet.[6] Für eine parametrisierte Kurve $L(t)$ wird die Torsion wie folgt berechnet:

$$\tau(t_0) = \frac{\det\left[\dot{L}(t_0), \ddot{L}(t_0), \dddot{L}(t_0)\right]}{\left\|\dot{L}(t_0) \times \ddot{L}(t_0)\right\|^2} \tag{3.11}$$

Die Torsion einer Kurve im 2D ist konstant Null bzw. nicht definiert (falls es sich um eine Gerade handelt). Dies gilt auch für planare Kurven im 3D, wenn also alle Punkte der Kurve dieselbe Schmiegebene haben. Weiterhin kann man sagen, dass die Torsion an all den Stellen nicht definiert ist, an denen für die Krümmung $\kappa = 0$ gilt, da dort die Schmiegebene aufgrund der linearen Abhängigkeit zwischen den ersten beiden Ableitungen des Ortsvektors nicht definiert ist ($\dot{L}(t_0) \times \ddot{L}(t_0) = \mathbf{0}$).

Krümmung und Torsion zusammen bilden ein vollständiges Invariantensystem einer Kurve K, was bedeutet, dass K bis auf euklidische Bewegungen eindeutig durch stetige Krümmung $\kappa > 0$ und stetige Torsion τ beschrieben ist. Somit liegt die Vermutung nahe, dass die Torsion von Tangentenkurven ein weiteres wichtiges Mittel zur Untersuchung von Vektorfeldern ist. Analog zum Krümmungsfeld eines Vektorfeldes sei folgendes definiert:

Definition. *Sei V ein Vektorfeld. Als* TORSIONSFELD $\tau(V)$ *wird dann jenes Skalarfeld bezeichnet, welches in jedem Punkt des Vektorfeldes V die dortige Torsion der durch diesen Punkt laufenden Tangentenkurve angibt. Nach* (2.25) *und* (2.26) *ergibt sich:*

$$\tau(V) = \frac{\det\left[\dot{L}, \ddot{L}, \dddot{L}\right]}{\left\|\dot{L} \times \ddot{L}\right\|^2} \tag{3.12}$$

Das Torsionsfeld $\tau(V)$ ist vorzeichenbehaftet, kann also sowohl negativ als auch positiv werden. Wie bereits erwähnt, ist die Torsion an Stellen mit Nullkrümmung nicht definiert. Nach Satz 1 ist $\tau(V)$ demnach für Vektorfelder der Klasse 4 nicht definiert. Für alle anderen Fälle muss jedoch auch hier das Verhalten in der Nähe eines kritischen Punktes untersucht werden.

Satz 2. *Sei V^ℓ ein lineares Vektorfeld und sei K ein nicht degenerierter kritischer Punkt von V^ℓ. Unter der Voraussetzung der Existenz einer Schmiegebene*

[6] Die Torsion wird in einigen Büchern auch als Windung bezeichnet.

($\dot{L} \times \ddot{L} \neq \mathbf{0}$) gilt für die Torsionswerte der Tangentenkurven entlang eines beliebigen Strahls aus K genau eine der folgenden Aussagen:

1. *Die Torsionswerte sind Null entlang des gesamten Strahls (mit Ausnahme von K).*

2. *Wenn r den Abstand zu K auf dem Strahl angibt, dann gilt:*

$$\lim_{r \to 0+0} \tau(V^\ell) = \lim_{r \to 0+0} \frac{1}{r} \to \infty$$

Weiterhin sei $\mathbb{A}$ die Menge der Strahlen, für die Aussage 1 gilt, und $\mathbb{B}$ die der Aussage 2 zugehörigen Strahlen. Entspricht K der topologischen Einordnung nach der Klasse 2 oder 5 (Tabelle 2.2 ab Seite 19), so gilt:

$$\mathbb{A} \neq \emptyset \qquad \mathbb{B} = \emptyset$$

Entspricht K jedoch jeder anderen Topologie, so gilt:

$$\mathbb{B} \neq \emptyset$$

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 1 wird ein lineares Vektorfeld mit sphärischen Parallelkoordinaten dargestellt (siehe (3.4) und Abbildung 3.1 auf Seite 30). Nun muss zunächst untersucht werden, in welchen Fällen für die Torsion $\tau(V^\ell) = 0 = \text{const.}$ gilt. Für alle anderen Fälle muss dann nur noch die umgekehrt proportionale Divergenz bei sinkendem Abstand zu K gezeigt werden.

Nach (3.12) wird die Torsion genau dann Null, wenn die Determinante der ersten 3 Ableitungsvektoren Null wird. Zunächst soll die Determinante aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}
\det\left[\dot{L}, \ddot{L}, \dddot{L}\right] = r^3 \cdot \det\left[J_{3D}^\ell\right] \big(& C_1 \cdot (\cos\phi \cdot \cos\lambda)^3 \\
&+ C_2 \cdot (\cos\phi \cdot \sin\lambda)^3 \\
&+ C_3 \cdot (\sin\phi)^3 \\
&+ C_4 \cdot (\cos^3\phi \cdot \cos^2\lambda \cdot \sin\lambda) \\
&+ C_5 \cdot (\cos^3\phi \cdot \cos\lambda \cdot \sin^2\lambda) \\
&+ C_6 \cdot (\cos^2\phi \cdot \cos^2\lambda \cdot \sin\phi) \\
&+ C_7 \cdot (\cos\phi \cdot \cos\lambda \cdot \sin^2\phi) \\
&+ C_8 \cdot (\cos^2\phi \cdot \sin^2\lambda \cdot \sin\phi) \\
&+ C_9 \cdot (\cos\phi \cdot \sin\lambda \cdot \sin^2\phi) \\
&+ C_{10} \cdot (\cos^2\phi \cdot \cos\lambda \cdot \sin\lambda \cdot \sin\phi)\big)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Die Terme $C_1, \ldots, C_{10}$ bestehen aus den Komponenten der ersten Ableitungen des Vektorfeldes und sind somit für ein bestimmtes V^ℓ konstant. Nur wenn diese Terme gleichzeitig zu Null evaluieren, wird die Torsion für beliebige Winkel

ϕ und λ ebenfalls Null. Dies führt zu einem Gleichungssystem folgender Form:

$$\left[\begin{array}{ccc} C_1 & = & 0 \\ C_2 & = & 0 \\ C_3 & = & 0 \\ C_4 & = & 0 \\ C_5 & = & 0 \\ C_6 & = & 0 \\ C_7 & = & 0 \\ C_8 & = & 0 \\ C_9 & = & 0 \\ C_{10} & = & 0 \end{array}\right] \tag{3.14}$$

(3.14) hat 8 Lösungen, die allesamt nicht degeneriert sind:

$$\left\{\begin{array}{c} u_y = u_z = v_x = v_z = 0 \\ u_x = v_y \neq 0 \\ w_z \neq 0 \\ w_x, w_y \end{array}\right\} \tag{3.15}$$

$$\left\{\begin{array}{c} u_x \neq 0 \\ v_y = w_z \neq 0 \\ u_y = u_z = v_z = w_y = 0 \\ w_x, v_x \end{array}\right\} \tag{3.16}$$

$$\left\{\begin{array}{c} u_x = w_z \neq 0 \\ v_y \neq 0 \\ v_x \neq 0 \\ u_y = u_z = v_z = 0 \\ w_y = \frac{w_x \cdot (v_y - w_z)}{v_x} \\ w_x \end{array}\right\} \tag{3.17}$$

$$\left\{\begin{array}{c} v_y \neq 0 \\ u_z \neq 0 \\ u_x \neq v_y - w_z \\ v_x = v_z = 0 \\ w_x = -\frac{-u_x \cdot w_z - v_y^2 + u_x \cdot v_y + w_z \cdot v_y}{u_z} \\ w_y = \frac{u_y \cdot (w_z - v_y)}{u_z} \\ u_y, w_z \end{array}\right\} \tag{3.18}$$

$$\left\{\begin{array}{c} u_x = v_y \neq 0 \\ w_z \neq 0 \\ w_y \neq 0 \\ v_x = v_z = w_x = 0 \\ u_z = \frac{u_y \cdot (w_z - v_y)}{w_y} \\ u_y \end{array}\right\} \tag{3.19}$$

$$\left\{\begin{matrix} w_z \neq 0 \\ u_y \neq 0 \\ u_x \neq w_z - v_y \\ u_z = v_z = 0 \\ v_x = \frac{-u_x \cdot w_z + w_z^2 + u_x \cdot v_y - w_z \cdot v_y}{u_y} \\ w_x = \frac{w_y \cdot (u_x - w_z)}{u_y} \\ v_y, w_y \end{matrix}\right\} \tag{3.20}$$

$$\left\{\begin{matrix} u_x = v_y \neq 0 \\ w_x \neq 0 \\ w_z \neq 0 \\ u_y = u_z = w_y = 0 \\ v_z = \frac{v_x \cdot (w_z - u_x)}{w_x} \\ v_x \end{matrix}\right\} \tag{3.21}$$

$$\left\{\begin{matrix} v_z \neq 0 \\ u_x \neq \frac{u_z \cdot v_x}{v_z} \\ u_x \neq \frac{v_z \cdot v_y + w_z \cdot v_z + 2 \cdot u_z \cdot v_x}{v_z} \\ u_y = -\frac{u_z \cdot (v_z \cdot u_x - u_z \cdot v_x - v_z \cdot v_y)}{v_z^2} \\ w_x = -\frac{v_x \cdot (-u_z \cdot v_x + v_z \cdot u_x - w_z \cdot v_z}{v_z^2} \\ w_y = \frac{(-u_z \cdot v_x + v_z \cdot u_x - w_z \cdot v_z) \cdot (v_z \cdot u_x - u_z \cdot v_x - v_z \cdot v_y)}{v_z^3} \\ u_z, v_x, v_y, w_z \end{matrix}\right\} \tag{3.22}$$

Aufgrund der Nichtbestimmtheit einiger Parameter in (3.15), …, (3.22) lassen sich die Lösungen nicht zu je einer topologischen Klasse zuordnen. Vielmehr lassen alle Lösungen kritische Punkte der Klasse 2 und 5 zu, so dass für diese Klassen $\tau(V^\ell) = 0 = \text{const.}$ gilt. Somit ist die erste Aussage von Satz 2 bewiesen. Es bleibt für alle anderen Topologien (in denen die Torsion definiert ist) die umgekehrt proportionale Divergenz bei $r \to 0$ zu zeigen. Hierzu führe man (3.5), (3.6), (3.7), (3.12) sowie (3.13) zusammen und separiere die konstanten Anteile (mit einem 'c' gekennzeichnet):

$$\tau(V^\ell) = \frac{r^3 \cdot \det\left[\dot{L}_c, \ddot{L}_c, \dddot{L}_c\right]}{r^4 \cdot \left(\left(\dot{L}_c \times \ddot{L}_c\right)_u^2 + \left(\dot{L}_c \times \ddot{L}_c\right)_v^2 + \left(\dot{L}_c \times \ddot{L}_c\right)_w^2\right)} \tag{3.23}$$

$$\lim_{r \to 0+0} \tau(V^\ell) = \lim_{r \to 0+0} \frac{1}{r} \to \infty \tag{3.24}$$

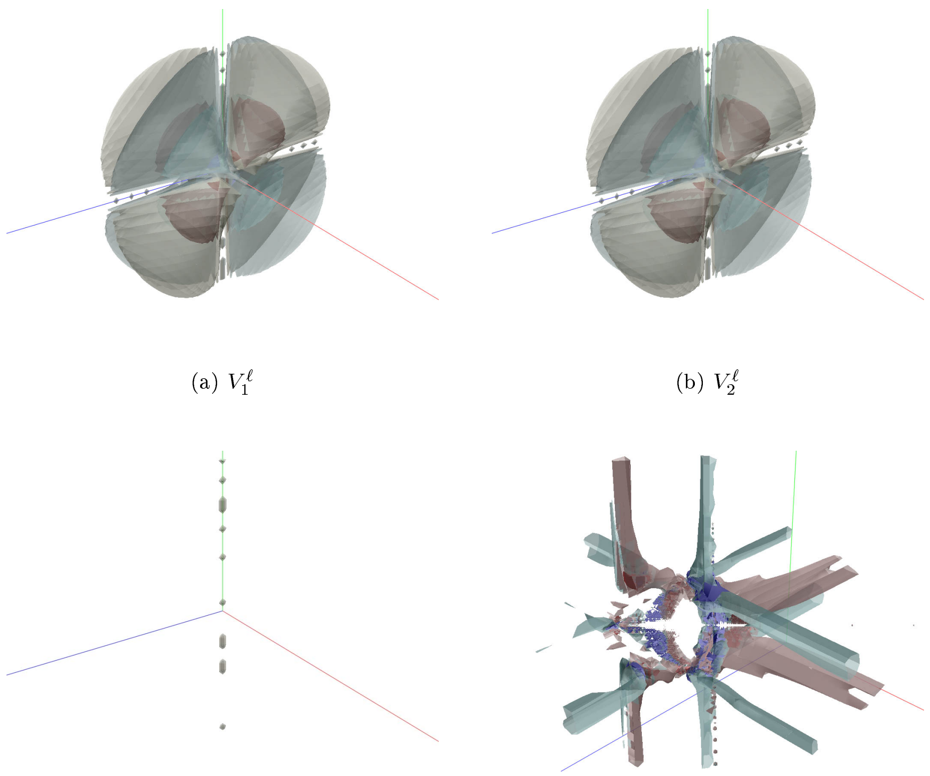
□

Es sei angemerkt, dass die topologischen Klassen 2 und 5 die einzigen Klassen sind, bei denen zu einem Eigenwert zwei linear unabhängige Eigenvektoren existieren.

Eine topologisch relevante Visualisierung des Torsionsfeldes (TORSIONSPLOT) wird durch die Aussage von Satz 2[7] ermöglicht, da zumindest für einige Topo-

[7] Ein Beweis für allgemeine Vektorfelder ist bisher noch nicht gelungen. Zum Krümmungsfeld analoge Betrachtungen führen jedoch zu der Vermutung, dass die Torsion i.a. in der Nähe eines kritischen Punktes divergiert.

logien die Torsion in der Nähe eines kritischen Punktes und nur dort divergiert. Analog zu den Krümmungsplots, lässt ein Torsionsplot gewisse Rückschlüsse auf die Topologie eines kritischen Punktes zu. Jedoch ergibt sich weder für alle Topologien eine sinnvolle Visualisierung (Abbildung 3.3c), noch beschreibt die Torsion der Tangentenkurven ein Vektorfeld hinreichend[8] (Abbildung 3.3a und Abbildung 3.3b).



(a) V_1^ℓ (b) V_2^ℓ

(c) V^q (d) V^t

Abbildung 3.3: Torsionsplots von 3D-Vektorfeldern. Die Strahlen geben die positiven Richtungen der Koordinatenachsen an (Rot = x, Grün = y, Blau = z). Rötliche Isoflächen beschreiben Bereiche positiver Torsion, während bläulich-grüne Isoflächen für negative Torsion stehen. Die in den Abbildungen sichtbaren, vereinzelten Punkte geben die nicht definierten Stellen im Torsionsfeld an und wurden absichtlich erzeugt. Zur Definition der Vektorfelder siehe Tabelle 3.1 auf Seite 28.

[8]Die Argumentation hierzu folgt den Ausführungen über die unzureichende Beschreibung eines Vektorfeldes mit einem Krümmungsfeld im Abschnitt 3.1. Man betrachte die Abbildungen 3.3a und 3.3b, die trotz unterschiedlicher Vektorfelder zwei identische Torsionsfelder zeigen.

3.3 Gaußsche Krümmung der Normalenflächen

Um die Krümmung einer Fläche S in einem Punkt P zu untersuchen, betrachtet man die Krümmung von Kurven, die auf S liegen, in P. Der Krümmungswert einer bestimmten Kurve K (Normalenschnitt, siehe [Far92]) im Punkt P wird als NORMALKRÜMMUNG bezeichnet und ist durch die zweite Grundform der Fläche gegeben ([Gel86]). Nun gehen beliebig viele Normalenschnitte durch P, und deren Krümmungswerte in P unterscheiden sich im allgemeinen. Jedoch lassen sich zwei sogenannte HAUPTKRÜMMUNGEN λ_1 und λ_2 finden, die den minimalen und maximalen Krümmungswert in P angeben. Das Produkt der Hauptkrümmungen bezeichnet man als GAUSSSCHE KRÜMMUNG $\mathcal{K}$ EINER FLÄCHE:

$$\mathcal{K} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \tag{3.25}$$

Aus der Differentialgeometrie ist weiterhin bekannt (siehe auch Abschnitt 2.4):

$$\mathcal{K} = \frac{\mathcal{D} \cdot \mathcal{D}'' - (\mathcal{D}')^2}{\mathcal{E} \cdot \mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \tag{3.26}$$

Gilt $\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \mathcal{D}'' = 0$ und somit auch $\mathcal{K} = 0$ für einen Punkt P einer Fläche, so wird P als Flachpunkt bezeichnet. Dies gilt beispielsweise für jeden Punkt einer Ebene. Alle anderen Punkte kann man mittels der Gaußschen Krümmung in drei Kategorien einteilen, welche zur Gestalt der Fläche in P eine enge Beziehung haben:

- $\mathcal{K}(P) > 0$. P heißt elliptisch.
- $\mathcal{K}(P) < 0$. P heißt hyperbolisch.
- $\mathcal{K}(P) = 0$. P heißt parabolisch.

Gauß zeigte in seinem *Theorema egregium*, dass die Gaußsche Krümmung gegenüber isometrischen Abbildungen invariant ist. Von einer isometrischen Abbildung zweier Flächen aufeinander spricht man, wenn man mittels einer umkehrbaren Funktion die Punkte der ersten Fläche auf die Punkte der zweiten Fläche abbilden kann, ohne dabei die Längen der Kurven auf der ersten Fläche zu ändern. Somit kann man sich diese Flächen als biegsame, aber nicht dehnbare Häute vorstellen.

Wie bereits im Abschnitt 2.4 erwähnt, geht durch jeden Punkt eines Vektorfeldes nur genau eine Normalenfläche. Somit kann man mit (3.26) sowie (2.28), (2.29), (2.30), (2.31), (2.32) und (2.33) folgendes Skalarfeld definieren:

Definition. *Sei V ein Vektorfeld. Als* GAUSSSCHES KRÜMMUNGSFELD $\mathcal{K}(V)$ *wird dann jenes Skalarfeld bezeichnet, welches in jedem Punkt des Vektorfeldes V die dortige Gaußsche Krümmung der durch diesen Punkt laufenden Normalenfläche angibt.*

Satz 3. *Sei V ein Vektorfeld. Dann gilt für die Berechnung seines Gaußschen Krümmungsfeldes $\mathcal{K}(V)$ folgende Form:*

$$\mathcal{K}(V) = \frac{k}{4 \cdot \|V\|^4} \tag{3.27}$$

mit

$$\begin{aligned}
k = &(4 \cdot v_y \cdot w_z - v_z^2 - w_y^2 - 2 \cdot v_z \cdot w_y) \cdot u^2 \\
&+ (4 \cdot u_x \cdot w_z - 2 \cdot w_x \cdot u_z - w_x^2 - u_z^2) \cdot v^2 \\
&+ (4 \cdot u_x \cdot v_y - v_x^2 - 2 \cdot v_x \cdot u_y - u_y^2) \cdot w^2 \\
&+ (2 \cdot (u_z \cdot v_z + u_z \cdot w_y + w_x \cdot v_z + w_x \cdot w_y) - 4 \cdot (u_y \cdot w_z + v_x \cdot w_z)) \cdot u \cdot v \\
&+ (2 \cdot (u_y \cdot w_y + v_x \cdot w_y + u_y \cdot v_z + v_x \cdot v_z) - 4 \cdot (v_y \cdot u_z + v_y \cdot w_x)) \cdot u \cdot w \\
&+ (2 \cdot (v_x \cdot u_z + u_y \cdot u_z + v_x \cdot w_x + u_y \cdot w_x) - 4 \cdot (u_x \cdot v_z + u_x \cdot w_y)) \cdot v \cdot w
\end{aligned}$$

Beweis. Man setze (2.28), (2.29), (2.30), (2.31), (2.32) und (2.33) in die allgemeine Form für die Gaußsche Krümmung (3.26) ein. Nach Vereinfachung und Umgruppierung erhält man (3.27). □

$\mathcal{K}(V)$ ist in kritischen Punkten nicht definiert. Es sei weiterhin angemerkt, dass $\mathcal{K}(V)$ vorzeichenbehaftet ist. Um das Verhalten in der Nähe eines kritischen Punktes zu studieren, stelle man sich nun wieder (analog zum Beweis von Satz 1) einen Strahl mit Beginn im kritischen Punkt vor. Es sollen nun Aussagen über das Verhalten von $\mathcal{K}(V)$ entlang dieses Strahls gezeigt werden.

Satz 4. *Sei V^ℓ ein lineares Vektorfeld und sei K ein nicht degenerierter kritischer Punkt von V^ℓ. Für die Gaußschen Krümmungswerte der Normalenflächen entlang eines beliebigen Strahls aus K gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

1. *Die Gaußschen Krümmungswerte sind Null entlang des gesamten Strahls (mit Ausnahme von K).*
2. *Wenn r den Abstand zu K auf dem Strahl angibt, dann gilt:*

$$\lim_{r \to 0+0} \mathcal{K}(V^\ell) = \lim_{r \to 0+0} \frac{1}{r^2} \to \infty$$

Weiterhin sei $\mathbb{A}$ die Menge der Strahlen, für die Aussage 1 gilt, und $\mathbb{B}$ die der Aussage 2 zugehörigen Strahlen. Entspricht K der topologischen Einordnung nach einem Center der Klasse 7 (Tabelle 2.2 ab Seite 19), so gilt:

$$\mathbb{A} \neq \emptyset \qquad \mathbb{B} = \emptyset$$

Entspricht K jedoch jeder anderen Topologie, so gilt:

$$\mathbb{B} \neq \emptyset$$

Beweis. Der Beweis folgt der Logik des Beweises von Satz 1. Mittels sphärischer Parallelkoordinaten wird ein lineares Vektorfeld dargestellt. Setzt man (3.4) in den Zähler von (3.27) ein, so erhält man eine Reihe von konstanten Termen (bestehend aus den ersten partiellen Ableitungen von V^ℓ), die allesamt zu Null evaluieren müssen, damit für beliebige Winkel ϕ und λ die Aussage $\mathcal{K}(V^\ell) = 0$ gilt. Ein entsprechendes Gleichungssystem liefert 12 Lösungen, wovon nur 4 nicht degeneriert sind. Die Untersuchung der möglichen Topologien für diese Fälle liefert das Ergebnis, dass nur im Falle eines Centers der Klasse 7 die Krümmungswerte im Gaußschen Krümmungsfeld konstant Null sind.

Für alle anderen Fälle bleibt zu zeigen, dass die Gaußsche Krümmung mit sinkendem Abstand zum kritischen Punkt divergiert; und zwar umgekehrt quadratisch proportional. Führt man (3.4) und (3.27) zusammen, so erhält man (konstante Elemente sind mit einem Index 'c' gekennzeichnet):

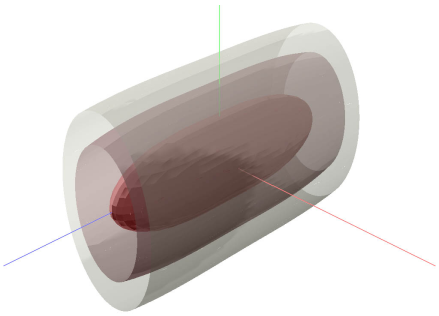
$$\mathcal{K}(V^\ell) = \frac{r^2 \cdot k_c}{r^4 \cdot 4 \cdot \left(\sqrt{u_c^2 + v_c^2 + w_c^2}\right)^4} \tag{3.28}$$

$$\lim_{r \to 0+0} \mathcal{K}(V^\ell) = \lim_{r \to 0+0} \frac{1}{r^2} \to \infty \tag{3.29}$$

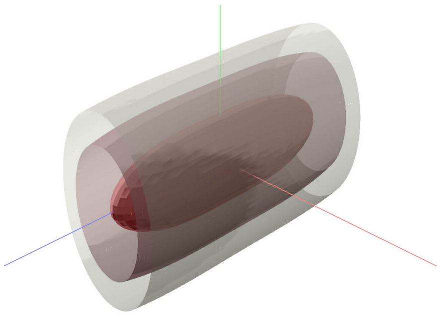
□

Die Divergenz des Gaußschen Krümmungsfeldes nach Satz 4[9] ermöglicht dessen topologisch relevante Visualisierung (GAUSSPLOT). Wenn man von der Topologie des Centers absieht, liefert ein Gaußplot zuverlässige Information über das Vorhandensein und die Lage von kritischen Punkten (Abbildung 3.4d). Jedoch ist es mit Hilfe des Gaußschen Krümmungsfeldes allein nicht möglich, zwischen allen Topologien zu unterscheiden (Abbildung 3.4a und Abbildung 3.4b). Dennoch ist der Nutzen des Gaußplots hoch, da Saddle-Topologien (siehe Tabellen 2.1 und 2.2) immer positive und negative Gaußsche Krümmung aufweisen. Man beachte dazu insbesondere Abbildung 3.4c.

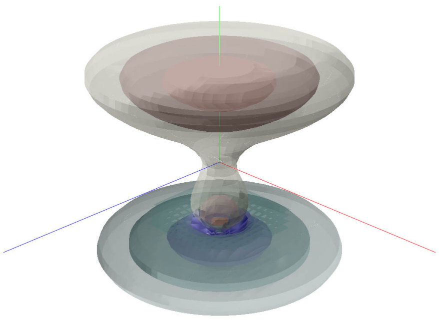
[9] Ein Beweis für allgemeine Vektorfelder wurde aufgrund der hohen Komplexität bisher noch nicht versucht.



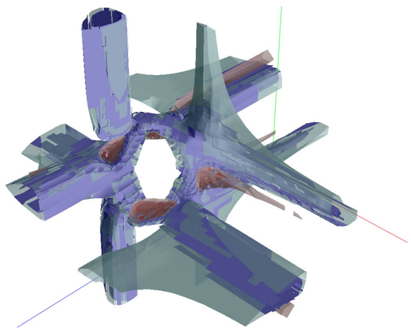
(a) V_1^ℓ



(b) V_2^ℓ



(c) V^q



(d) V^t

Abbildung 3.4: Gaußplots von 3D-Vektorfeldern. Die Strahlen geben die positiven Richtungen der Koordinatenachsen an (Rot $= x$, Grün $= y$, Blau $= z$). Rötliche Isoflächen beschreiben Bereiche positiver Gaußscher Krümmung, während bläulich-grüne Isoflächen für negative Gaußkrümmung stehen. Zur Definition der Vektorfelder siehe Tabelle 3.1 auf Seite 28.

3.4 Mittlere Krümmung der Normalenflächen

Die MITTLERE KRÜMMUNG $\mathcal{H}$ EINER FLÄCHE ist das arithmetische Mittel der beiden Hauptkrümmungen λ_1 und λ_2 (siehe Abschnitt 3.3), also

$$\mathcal{H} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \tag{3.30}$$

Die mittlere Krümmung lässt sich auch mittels der Grundgrößen einer Fläche beschreiben, wie sie im Abschnitt 2.4 vorgestellt wurden:

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{E} \cdot \mathcal{D}'' - 2 \cdot \mathcal{F} \cdot \mathcal{D}' + \mathcal{G} \cdot \mathcal{D}}{2 \cdot (\mathcal{E} \cdot \mathcal{G} - \mathcal{F}^2)} \tag{3.31}$$

Ebenso wie die Gaußsche Krümmung gilt für die mittlere Krümmung an Flachpunkten[10] $\mathcal{H} = 0$; also beispielsweise in einer Ebene. Im Gegensatz zu $\mathcal{K}$ ist $\mathcal{H}$ nicht invariant gegenüber isometrischen Abbildungen. Ein weiterer interessanter Aspekt im Zusammenhang mit der Gaußschen Krümmung besteht darin, dass aus $\mathcal{H} = 0$ und $\mathcal{K} \neq 0$ nach (3.25) und (3.30) immer $\mathcal{K} < 0$ folgt.[11]

Analog zum Gaußschen Krümmungsfeld sei folgendes definiert:

Definition. *Sei V ein Vektorfeld. Als* MITTLERES KRÜMMUNGSFELD $\mathcal{H}(V)$ *wird dann jenes Skalarfeld bezeichnet, welches in jedem Punkt des Vektorfeldes V die dortige mittlere Krümmung der durch diesen Punkt laufenden Normalenfläche angibt.*

Satz 5. *Sei V ein Vektorfeld. Dann gilt für die Berechnung seines mittleren Krümmungsfeldes $\mathcal{H}(V)$ folgende Form:*

$$\mathcal{H}(V) = \frac{h}{2 \cdot \|V\|^3} \tag{3.32}$$

mit

$$\begin{aligned} h = {} & (-v_y - w_z) \cdot u^2 + (-u_x - w_z) \cdot v^2 + (-u_x - v_y) \cdot w^2 \\ & + (u_y + v_x) \cdot u \cdot v + (u_z + w_x) \cdot u \cdot w + (v_z + w_y) \cdot v \cdot w \end{aligned}$$

Beweis. Man setze (2.28), (2.29), (2.30), (2.31), (2.32) und (2.33) in die allgemeine Form für die mittlere Krümmung (3.31) ein. Nach Vereinfachung und Umgruppierung erhält man (3.32). □

$\mathcal{H}(V)$ lässt sich auf besonders einfache Weise mit Hilfe der Divergenz eines normierten Vektorfeldes darstellen. Wenn man das Vektorfeld V zunächst normiert ($\overline{V}$) und die somit bekannten Beziehungen (2.6), (2.7) und (2.8) sowie $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ in (3.32) einsetzt, so erhält man:

$$\mathcal{H}(V) = -\frac{\overline{u}_x + \overline{v}_y + \overline{w}_z}{2} = -\frac{\operatorname{div}(\overline{V})}{2} \tag{3.33}$$

[10] $\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \mathcal{D}'' = 0$

[11] Minimalflächen haben daher immer nicht-positive Gaußsche Krümmung; ihre mittlere Krümmung ist konstant Null.

Satz 6. *Sei V^ℓ ein lineares Vektorfeld und sei K ein nicht degenerierter kritischer Punkt von V^ℓ. Für die mittleren Krümmungswerte der Normalenflächen entlang eines beliebigen Strahls aus K gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

1. *Die mittleren Krümmungswerte sind Null entlang des gesamten Strahls (mit Ausnahme von K).*
2. *Wenn r den Abstand zu K auf dem Strahl angibt, dann gilt:*

$$\lim_{r\to 0+0} \mathcal{H}(V^\ell) = \lim_{r\to 0+0} \frac{1}{r} \to \infty$$

Weiterhin sei $\mathbb{A}$ die Menge der Strahlen, für die Aussage 1 gilt, und $\mathbb{B}$ die der Aussage 2 zugehörigen Strahlen. Unabhängig davon welcher Topologie K entspricht (Tabelle 2.2 ab Seite 19), gilt:

$$\mathbb{B} \neq \emptyset$$

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 1 erfolgen die Betrachtungen entlang eines Strahls mit Startpunkt im kritischen Punkt. Hierzu werden sphärische Parallelkoordinaten eingesetzt. In (3.32) werden u, v und w durch eine Taylor-Expansion 1. Ordnung ersetzt, die lineare Vektorfelder hinreichend beschreibt. Es ergibt sich eine Form von (3.32), die in Abhängigkeit von r (dem Abstand zum kritischen Punkt) und den die Richtung des Strahls bestimmenden Winkeln ϕ und λ steht (es sei nur der für die Betrachtungen relevante Zähler der Funktion dargestellt):

$$\begin{aligned} h_{radial} = r^2 \cdot \big(& C_1 \cdot (\cos\phi \cdot \cos\lambda)^2 \\ & + C_2 \cdot (\cos\phi \cdot \sin\lambda)^2 \\ & + C_3 \cdot (\sin\phi)^2 \\ & + C_4 \cdot (\cos^2\phi \cdot \cos\lambda \cdot \sin\lambda) \\ & + C_5 \cdot (\cos\phi \cdot \cos\lambda \cdot \sin\phi) \\ & + C_6 \cdot (\cos\phi \cdot \sin\lambda \cdot \sin\phi)\big) \end{aligned} \tag{3.34}$$

Die mit $C_1, \ldots, C_6$ bezeichneten Konstanten bestehen aus den partiellen Ableitungskomponenten von V^ℓ. Da für den Abstand vom kritischen Punkt stets $r > 0$ gilt und für beliebige, nicht-triviale Kombinationen von $C_1, \ldots, C_6$ immer die Winkel ϕ und λ so bestimmt werden können, dass $h_{radial} \neq 0$ gilt, kommt nur die Triviallösung $C_1 = \ldots = C_6 = 0$ in Frage. Ein derartiges Gleichungssystem liefert für nicht degenerierte kritische Punkte eine leere Lösungsmenge. $\mathcal{H}(V)$ ist also bei linearen Vektorfeldern in der Umgebung eines nicht degenerierten kritischen Punktes nie konstant Null.

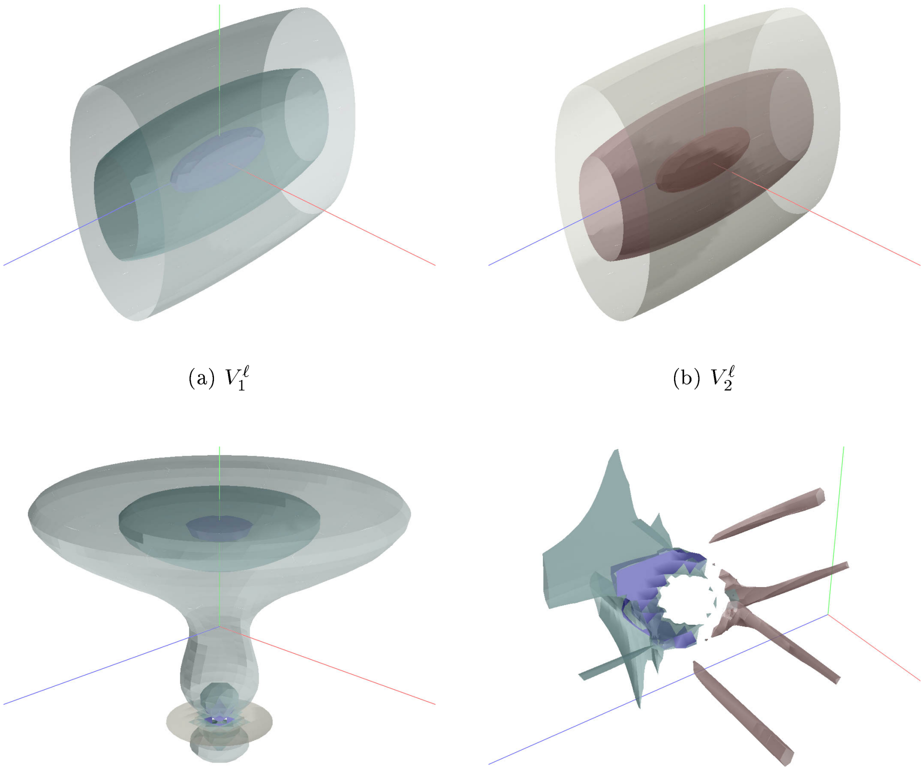
Somit bleibt noch die Divergenz zu beweisen. Führt man (3.4) und (3.32) zusammen, so erhält man (konstante Elemente sind mit Index 'c' gekennzeichnet):

$$\mathcal{H}(V^\ell) = \frac{r^2 \cdot h_c}{r^3 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{u_c^2 + v_c^2 + w_c^2}\right)^3} \tag{3.35}$$

$$\lim_{r\to 0+0} \mathcal{H}(V^\ell) = \lim_{r\to 0+0} \frac{1}{r} \to \infty \tag{3.36}$$

□

Nach Satz 6[12] ist die Visualisierung des mittleren Krümmungsfeldes $\mathcal{H}(V)$ (MEANPLOT[13]) ein besonders wichtiges Mittel zur Untersuchung von Vektorfeldern, da dieses Feld bei allen Topologien in der Nähe kritischer Punkte divergiert. Zwar ist es nur mittels eines Meanplots möglich, zwischen V_1^ℓ und V_2^ℓ zu unterscheiden (Abbildung 3.5a und Abbildung 3.5b), jedoch lässt sich leicht zeigen, dass auch das mittlere Krümmungsfeld allein nicht genügt, um beliebige Vektorfelder eindeutig voneinander unterscheiden zu können.



(a) V_1^ℓ (b) V_2^ℓ

(c) V^q (d) V^t

Abbildung 3.5: Meanplots von 3D-Vektorfeldern. Die Strahlen geben die positiven Richtungen der Koordinatenachsen an (Rot $= x$, Grün $= y$, Blau $= z$). Rötliche Isoflächen beschreiben Bereiche positiver mittlerer Krümmung, während bläulich-grüne Isoflächen für negative mittlere Krümmung stehen. Zur Definition der Vektorfelder siehe Tabelle 3.1 auf Seite 28.

[12] Ein allgemeiner Beweis wurde bisher noch nicht gefunden.
[13] Der Begriff Meanplot ist abgeleitet vom englischen Begriff für die mittlere Krümmung: *mean curvature*

3.5 Zusammenfassende Erläuterungen

In den vorangegangen Abschnitten dieses Kapitels wurden das Krümmungsfeld, das Torsionsfeld, das Gaußsche Krümmungsfeld sowie das mittlere Krümmungsfeld als skalare Eigenschaftsfelder eines Vektorfeldes mit ihren Eigenschaften vorgestellt. Ziel dieser Arbeit ist es, eine Teilmenge dieser Skalarfelder zu bestimmen, die eindeutig die Topologie eines kritischen Punktes (zumindest für lineare Vektorfelder) widerspiegelt. Diese Frage wird im Kapitel 4 beantwortet werden. Mit den entsprechenden Visualisierungen soll dann eine visuelle Topologiebestimmung möglich werden.

Es sei an dieser Stelle bereits angemerkt, dass zu der Gruppe der topologiebestimmenden Skalarfelder das mittlere Krümmungsfeld $\mathcal{H}(V)$ gehören muss, da nur damit eine Unterscheidung zwischen inversen Vektorfeldern möglich ist. Dies haben die einzelnen Plots der Beispielvektorfelder V_1^ℓ und V_2^ℓ gezeigt.

Satz 7. *Seien V^ℓ ein lineares Vektorfeld und K ein nicht degenerierter kritischer Punkt von V^ℓ. Weiterhin sei Σ^ℓ eine folgendermaßen definierte Menge von zu V^ℓ gehörigen skalaren Eigenschaftsfeldern:*

$$\Sigma^\ell := \left\{\kappa(V^\ell), \tau(V^\ell), \mathcal{K}(V^\ell), \mathcal{H}(V^\ell)\right\} \tag{3.37}$$

Dann gilt für alle Elemente der Menge Π_{Σ^ℓ},

$$\Pi_{\Sigma^\ell} := \left\{\sigma \subseteq \Sigma^\ell : \|\sigma\| \geq 2 \ \wedge \ \sigma \neq \left\{\kappa(V^\ell), \tau(V^\ell)\right\}\right\} \quad \cup \quad \left\{\left\{\mathcal{H}(V^\ell)\right\}\right\} \tag{3.38}$$

die Teilmengen von Σ^ℓ sind, dass die Skalarwerte von mindestens einem der enthaltenen Eigenschaftsfelder mit sinkendem Abstand zum kritischen Punkt K divergieren.

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus den Sätzen 1, 2, 4 und 6. Das mittlere Krümmungsfeld divergiert in der Nähe aller kritischen Punkte von linearen Vektorfeldern. Somit gilt die Aussage von Satz 7 auch für alle Teilmengen von Σ^ℓ, die $\mathcal{H}(V^\ell)$ enthalten. Alle weiteren Elemente von Π_{Σ^ℓ} müssen mindestens zwei Eigenschaftsfelder enthalten, wobei folgende Ausnahme zu machen ist: Das Krümmungsfeld und das Torsionsfeld divergieren nach den entsprechenden Sätzen nicht bei kritischen Punkten der Klasse 4 (Die Torsion ist dort nicht definiert).

Alle weiteren Überlegungen lassen sich leicht mit Hilfe der angegebenen Sätze anstellen. □

Satz 7 stellt für topologische Untersuchungen mittels der Eigenschaftsfelder eine wichtige Basis dar: Nutzt man eine der mittels Π_{Σ^ℓ} angegebenen Teilmengen von Σ^ℓ zur Visualisierung, so erhält man in mindestens einem der Plots eine nicht-leere Darstellung. Weitere Ausführungen zur Visualisierung der Eigenschaftsfelder findet man im Kapitel 5.

Kapitel 4

Eindeutigkeit der Vektorfeldbeschreibung mit Krümmungsfeldern

In diesem Kapitel soll die Frage geklärt werden, welche Krümmungsfelder ein Vektorfeld eindeutig beschreiben. Eine solche Menge von Krümmungsfeldern enthält alle Informationen eines Vektorfeldes und läßt somit auch eindeutige topologische Aussagen zu. Sowohl für allgemeine als auch für lineare Vektorfelder konnte eine solche Menge noch nicht gefunden werden. Jedoch ist es gelungen, einen derartigen Beweis für eine Untermenge der linearen Vektorfelder zu führen, welche im folgenden definiert werden soll.

Definition. *Sei C die kanonische Form einer beliebigen, konstanten Jacobi Matrix und identisch zu einer der kanonischen Formen der in Tabelle 2.2 aufgeführten, nicht-degenerierten topologischen Klassen. Als* KANONISCHES VEKTORFELD *V^C bezeichnet man dann:*

$$V^C = C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Nach Tabelle 2.2 werden 7 Formen von C unterschieden. Diese lassen sich wiederum mittels der folgenden 4 Fälle zusammenfassen, wobei man beachte, dass die in den folgenden Formeln auftretenden Variablen konstant und ungleich Null sind:

- **Fall 1:** C hat 3 linear unabhängige Eigenvektoren sowie einen, zwei oder drei reelle Eigenwerte und läßt sich wie folgt darstellen:

$$C_1 = \begin{bmatrix} u_x & 0 & 0 \\ 0 & v_y & 0 \\ 0 & 0 & w_z \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Die Belegung der Variablen u_x, v_y und w_z bestimmt die topologische Klasse, zu der diese kanonische Form gehört. Es ergibt sich:

- Klasse 1: $u_x \neq v_y \neq w_z$
- Klasse 2: $u_x = v_y \neq w_z$
- Klasse 4: $u_x = v_y = w_z$

- **Fall 2:** C hat 2 linear unabhängige Eigenvektoren sowie einen oder zwei reelle Eigenwerte und läßt sich wie folgt darstellen:

$$C_2 = \begin{bmatrix} u_x & 1 & 0 \\ 0 & u_x & 0 \\ 0 & 0 & w_z \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Die Belegung der Variablen u_x und w_z bestimmt die topologische Klasse, zu der diese kanonische Form gehört. Es ergibt sich:

  - Klasse 3: $u_x \neq w_z$
  - Klasse 5: $u_x = w_z$

- **Fall 3:** C hat 1 linear unabhängigen Eigenvektor sowie einen reellen Eigenwert und läßt sich wie folgt darstellen:

$$C_3 = \begin{bmatrix} u_x & 1 & 0 \\ 0 & u_x & 1 \\ 0 & 0 & u_x \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

C_3 läßt sich direkt der topologischen Klasse 6 zuordnen.

- **Fall 4:** C hat komplexe Eigenwerte und läßt sich wie folgt darstellen:

$$C_4 = \begin{bmatrix} u_x & -v_x & 0 \\ v_x & u_x & 0 \\ 0 & 0 & w_z \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

C_4 läßt sich direkt der topologischen Klasse 7 zuordnen. Es ist zu beachten, dass $v_x < 0$ gilt (siehe Tabelle 2.2).

Es ist leicht zu sehen, dass (4.2), (4.3), (4.4) und (4.5) zusammen die Klasse der kanonischen Vektorfelder eindeutig beschreiben.

Satz 8. *Seien V_1^C und V_2^C zwei beliebige kanonische Vektorfelder und $\mathcal{H}(V_1^C)$ sowie $\mathcal{H}(V_2^C)$ deren mittlere Krümmungsfelder. Weiterhin sei $k > 0$ eine beliebige reelle Konstante. Dann gilt folgende Aussage:*

$$\mathcal{H}(V_1^C) = \mathcal{H}(V_2^C) \qquad \Leftrightarrow \qquad V_1^C = k \cdot V_2^C \tag{4.6}$$

Beweis. Die Richtung „$\Leftarrow$“ ist trivial und lässt sich direkt aus (3.32) ableiten.

Die Richtung „$\Rightarrow$“ kann mittels der bisher gewonnen Erkenntnisse über kanonische (lineare) Vektorfelder und mittlere Krümmungsfelder bewiesen werden. Nach Satz 6 ist die mittlere Krümmung eines linearen Vektorfeldes auf einem Strahl mit Beginn im kritischen Punkt K nur von dem Abstand r zu K abhängig, da alle weiteren eingehenden Größen für einen bestimmten Strahl konstant sind. Um $\mathcal{H}(V^C)$ entlang dieses Strahles zu beschreiben, genügt es also, die mittlere Krümmung *eines* Punktes auf diesem Strahl zu betrachten.

Dieses Verfahren wird für die 3 Schnittpunkte der positiven Koordinatenachsen mit der Einheitskugel um den Ursprung durchgeführt, also für:

$$P_{100} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_{010} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_{001} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

Gibt es keine zwei voneinander verschiedenen kanonischen Vektorfelder V_1^C und V_2^C (bis auf die Länge der Vektoren), deren mittlere Krümmungswerte an den Punkten P_{100}, P_{010} und P_{001} gleich sind, so ist die Aussage von Satz 8 bewiesen.

Da sich die Menge der kanonischen Vektorfelder nicht geschlossen beschreiben lässt, wird diese Untersuchung zunächst einzeln für die mittels (4.2), (4.3), (4.4) und (4.5) eingeführten 4 Fälle durchgeführt. Im Anschluss daran bleibt dann noch zu zeigen, dass auch die Vektorfelder zweier verschiedener Fälle eindeutig (also voneinander unterscheidbar) mittels der mittleren Krümmung beschreibbar sind.

Fall 1: Die Vektorfelder V_1^C und V_2^C werden nach (4.1) und (4.2) wie folgt beschrieben:

$$V_1^C = \begin{pmatrix} u_x \cdot x \\ v_y \cdot y \\ w_z \cdot z \end{pmatrix} \qquad V_2^C = \begin{pmatrix} u_{2_x} \cdot x \\ v_{2_y} \cdot y \\ w_{2_z} \cdot z \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

V_2^C lässt sich mittels eines konstanten Faktors derart multiplizieren, dass $u_{2_x} = u_x$ gilt. Diese Operation hat nur Einfluss auf die Länge der Vektoren von V_2^C und ist zum Beweis von Satz 8 demnach zulässig. Im weiteren sei also V_2^C wie folgt beschrieben:

$$V_2^C = \begin{pmatrix} u_x \cdot x \\ v'_y \cdot y \\ w'_z \cdot z \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Anhand von (3.32) werden nunmehr die Formeln für die mittlere Krümmung an den Punkten P_{100}, P_{010} und P_{001} der Vektorfelder V_1^C und V_2^C aufgestellt:

$$\mathcal{H}_1(P_{100}) = -\frac{w_z + v_y}{2 \cdot |u_x|} \tag{4.10}$$

$$\mathcal{H}_1(P_{010}) = -\frac{u_x + w_z}{2 \cdot |v_y|} \tag{4.11}$$

$$\mathcal{H}_1(P_{001}) = -\frac{v_y + u_x}{2 \cdot |w_z|} \tag{4.12}$$

$$\mathcal{H}_2(P_{100}) = -\frac{w'_z + v'_y}{2 \cdot |u_x|} \tag{4.13}$$

$$\mathcal{H}_2(P_{010}) = -\frac{u_x + w'_z}{2 \cdot |v'_y|} \tag{4.14}$$

$$\mathcal{H}_2(P_{001}) = -\frac{v'_y + u_x}{2 \cdot |w'_z|} \tag{4.15}$$

Nun müssen alle Vektorfelder V_2^C bestimmt werden, deren mittlere Krümmungswerte an den genannten Punkten mit denen von V_1^C übereinstimmen. Dies führt zu folgendem Gleichungssystem mit den zwei Unbekannten v'_y und w'_z:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_1(P_{100}) & = & \mathcal{H}_2(P_{100}) \\ \mathcal{H}_1(P_{010}) & = & \mathcal{H}_2(P_{010}) \\ \mathcal{H}_1(P_{001}) & = & \mathcal{H}_2(P_{001}) \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Die einzige Lösung von (4.16) ist die Triviallösung $v'_y = v_y$ und $w'_z = w_z$. Somit ist bewiesen, dass kanonische Vektorfelder nach (4.2) eindeutig durch die mittlere Krümmung beschrieben werden.

Fall 2: Die Vektorfelder V_1^C und V_2^C werden nach (4.1) und (4.3) wie folgt beschrieben:

$$V_1^C = \begin{pmatrix} u_x \cdot x + y \\ u_x \cdot y \\ w_z \cdot z \end{pmatrix} \qquad V_2^C = \begin{pmatrix} u'_x \cdot x + y \\ u'_x \cdot y \\ w'_z \cdot z \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

Analog zu Fall 1 werden anhand von (3.32) nunmehr die Formeln für die mittlere Krümmung an den Punkten P_{100}, P_{010} und P_{001} der Vektorfelder V_1^C und V_2^C aufgestellt:

$$\mathcal{H}_1(P_{100}) = -\frac{u_x + w_z}{2 \cdot |u_x|} \tag{4.18}$$

$$\mathcal{H}_1(P_{010}) = -\frac{(w_z + u_x^3 + u_x^2 \cdot w_z)}{2 \cdot (1 + u_x^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.19}$$

$$\mathcal{H}_1(P_{001}) = -\frac{u_x}{|w_z|} \tag{4.20}$$

$$\mathcal{H}_2(P_{100}) = -\frac{u'_x + w'_z}{2 \cdot |u'_x|} \tag{4.21}$$

$$\mathcal{H}_2(P_{010}) = -\frac{(w'_z + u_x'^3 + u_x'^2 \cdot w'_z)}{2 \cdot (1 + u_x'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.22}$$

$$\mathcal{H}_2(P_{001}) = -\frac{u'_x}{|w'_z|} \tag{4.23}$$

Ein Gleichungssystem analog zu (4.16) führt wiederum für die zwei Unbekannten u'_x und w'_z nur zu der Triviallösung $u'_x = u_x$ und $w'_z = w_z$. Somit ist bewiesen, dass kanonische Vektorfelder nach (4.3) eindeutig durch die mittlere Krümmung beschrieben werden.

Fall 3: Die Vektorfelder V_1^C und V_2^C werden nach (4.1) und (4.4) wie folgt beschrieben:

$$V_1^C = \begin{pmatrix} u_x \cdot x + y \\ u_x \cdot y + z \\ u_x \cdot z \end{pmatrix} \qquad V_2^C = \begin{pmatrix} u'_x \cdot x + y \\ u'_x \cdot y + z \\ u'_x \cdot z \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

Analog zu Fall 1 werden unter Verwendung von (3.32) die Formeln für die mittlere Krümmung an den Punkten P_{100}, P_{010} und P_{001} der Vektorfelder V_1^C

und V_2^C aufgestellt:

$$\mathcal{H}_1(P_{100}) = -\mathrm{sgn}(u_x) \tag{4.25}$$
$$\mathcal{H}_1(P_{010}) = -\frac{u_x \cdot (1 + 2 \cdot u_x^2)}{2 \cdot (1 + u_x^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.26}$$
$$\mathcal{H}_1(P_{001}) = -\frac{u_x \cdot (1 + 2 \cdot u_x^2)}{2 \cdot (1 + u_x^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.27}$$
$$\mathcal{H}_2(P_{100}) = -\mathrm{sgn}(u'_x) \tag{4.28}$$
$$\mathcal{H}_2(P_{010}) = -\frac{u'_x \cdot (1 + 2 \cdot u_x'^2)}{2 \cdot (1 + u_x'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.29}$$
$$\mathcal{H}_2(P_{001}) = -\frac{u'_x \cdot (1 + 2 \cdot u_x'^2)}{2 \cdot (1 + u_x'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.30}$$

Auf dieser Basis wird ein Gleichungssystem analog zu (4.16) mit der Unbekannten u'_x aufgestellt. Es ergeben sich insgesamt 5 Lösungen, wovon eine die Triviallösung $u'_x = u_x$ ist. Die anderen 4 Lösungen für u'_x enthalten allesamt den Term $\sqrt{-7 \cdot u_x^4 - 4 \cdot u_x^2}$, der für beliebige u_x imaginär ist. Damit sind diese Lösungen auszuschliessen, da für u'_x nur reelle Werte erlaubt sind. Es bleibt die Triviallösung und somit ist bewiesen, dass kanonische Vektorfelder nach (4.4) eindeutig durch die mittlere Krümmung beschrieben werden.

Fall 4: Die Vektorfelder V_1^C und V_2^C werden nach (4.1) und (4.5) wie folgt beschrieben:

$$V_1^C = \begin{pmatrix} u_x \cdot x - v_x \cdot y \\ v_x \cdot x + u_x \cdot y \\ w_z \cdot z \end{pmatrix} \qquad V_2^C = \begin{pmatrix} u_{2_x} \cdot x - v_{2_x} \cdot y \\ v_{2_x} \cdot x + u_{2_x} \cdot y \\ w_{2_z} \cdot z \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

Analog zu Fall 1 lässt sich V_2^C mittels eines konstanten Faktors derart multiplizieren, dass $u2_x = u_x$ gilt. Diese Operation hat nur Einfluss auf die Länge der Vektoren von V_2^C und ist zum Beweis von Satz 8 demnach zulässig. Im weiteren sei also V_2^C wie folgt beschrieben:

$$V_2^C = \begin{pmatrix} u_x \cdot x - v'_x \cdot y \\ v'_x \cdot x + u_x \cdot y \\ w'_z \cdot z \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

Es werden unter Verwendung von (3.32) die Formeln für die mittlere Krümmung an den Punkten P_{100}, P_{010} und P_{001} der Vektorfelder V_1^C und V_2^C aufgestellt:

$$\mathcal{H}_1(P_{100}) = -\frac{u_x + w_z}{2\sqrt{u_x^2 + v_x^2}} \tag{4.33}$$

$$\mathcal{H}_1(P_{010}) = -\frac{u_x + w_z}{2\sqrt{u_x^2 + v_x^2}} \tag{4.34}$$

$$\mathcal{H}_1(P_{001}) = -\frac{u_x}{|w_z|} \tag{4.35}$$

$$\mathcal{H}_2(P_{100}) = -\frac{u_x + w_z'}{2\sqrt{u_x^2 + v_x'^2}} \tag{4.36}$$

$$\mathcal{H}_2(P_{010}) = -\frac{u_x + w_z'}{2\sqrt{u_x^2 + v_x'^2}} \tag{4.37}$$

$$\mathcal{H}_2(P_{001}) = -\frac{u_x}{|w_z'|} \tag{4.38}$$

Analog zu (4.16) wird ein Gleichungssystem mit den zwei Unbekannten v_x' und w_z' aufgestellt. Man erhält für w_z' die Triviallösung $w_z' = w_z$. Für v_x' ergeben sich jedoch zwei Lösungen: $v_x' = v_x$ und $v_x' = -v_x$. Wie bereits zu (4.5) auf Seite 48 beschrieben, müssen v_x' und v_x bei Vektorfeldern dieser Form negative Werte aufweisen. Damit fällt die letztere Lösung für v_x' weg und es bleibt die Triviallösung. Somit konnte gezeigt werden, dass kanonische Vektorfelder nach (4.5) eindeutig durch die mittlere Krümmung beschrieben werden.

Nach Behandlung aller Fälle ist festzuhalten, dass die mittlere Krümmung zwei verschiedene, aber zu einem Fall gehörige kanonische Vektorfelder eindeutig (also unterscheidbar) unter Nichtbeachtung der Länge der Vektoren beschreibt. Im Anhang B wird bewiesen, dass dies auch für zwei beliebige kanonische Vektorfelder verschiedener Fälle gilt. Somit ist die Aussage von Satz 8 bewiesen. □

Nach Satz 8 beinhaltet das mittlere Krümmungsfeld alle Informationen eines kanonischen Vektorfeldes. Somit beinhaltet das mittlere Krümmungsfeld auch alle *topologischen* Informationen über diese Klasse von Vektorfeldern. Weiterhin sei nochmals darauf hingewiesen, dass die Klasse der kanonischen Vektorfelder alle topologischen Fälle in ihrer Grundform beinhaltet. Somit liegt die Vermutung nahe, dass mit Hilfe der mittleren Krümmung alle linearen Vektorfelder (zumindest topologisch) eindeutig beschreibbar sind. Dazu müsste man zeigen, dass das bestimmte Eigenschaften des mittleren Krümmungsfeldes im Rahmen der Aussage von Satz 8 invariant gegenüber der Kanonisierung eines linearen Vektorfeldes sind.

Kapitel 5

Visualisierung und Implementation

5.1 Komponenten zur Visualisierung

5.1.1 Normierung der Skalarwerte

Wie im Kapitel 3 bereits gezeigt, divergieren die Skalarfelder $\kappa(V)$, $\tau(V)$, $\mathcal{K}(V)$ und $\mathcal{H}(V)$ in der Nähe eines kritischen Punktes. Dieses Verhalten ist jedoch für einen Nutzer bei der Wahl der Visualisierungsparameter schwer nachzuvollziehen. Geht man davon aus, dass die Werte des Skalarfeldes entweder selbst visualisiert oder auf die Visualisierung einen maßgeblichen Einfluss haben, so stellen sich drei Fragen:

- Wie sollen Informationen über die Skalarwerte in der Visualisierung mittels beispielsweise Farbe oder Transparenz zum Ausdruck kommen, wenn der Wertebereich des Skalarfeldes unbegrenzt, jedoch die Wertebereiche der visuellen Attribute begrenzt sind?

- In welchem Verhältnis sollen die Schwellwerte zueinander stehen?

- Wie soll das Verhältnis der Schwellwerte gegenüber den anderen Werten im Skalarfeld sein? Findet man die Schwellwerte nur in unmittelbarer Nähe des kritischen Punktes, so wird die Visualisierung zu wenig Information über das Verhalten des gesamten Skalarfeldes bieten. Umgekehrt liefert eine Visualisierung von vom kritischen Punkt weit entfernten Schwellwerten zu wenig Information über das Verhalten in der Nähe des kritischen Punktes selbst.

Eine mögliche Antwort auf diese Fragen liegt in der Transformierung des unbegrenzten Wertebereiches der Skalarfelder in einen begrenzten Wertebereich mittels einer Normierungsfunktion. Die in [The95] für diese Aufgabe vorgeschlagene Funktion wurde in dieser Arbeit übernommen:

$$s_{norm} = \operatorname{sgn}(s) \cdot (1 - e^{-\|s\| \cdot con}) \tag{5.1}$$

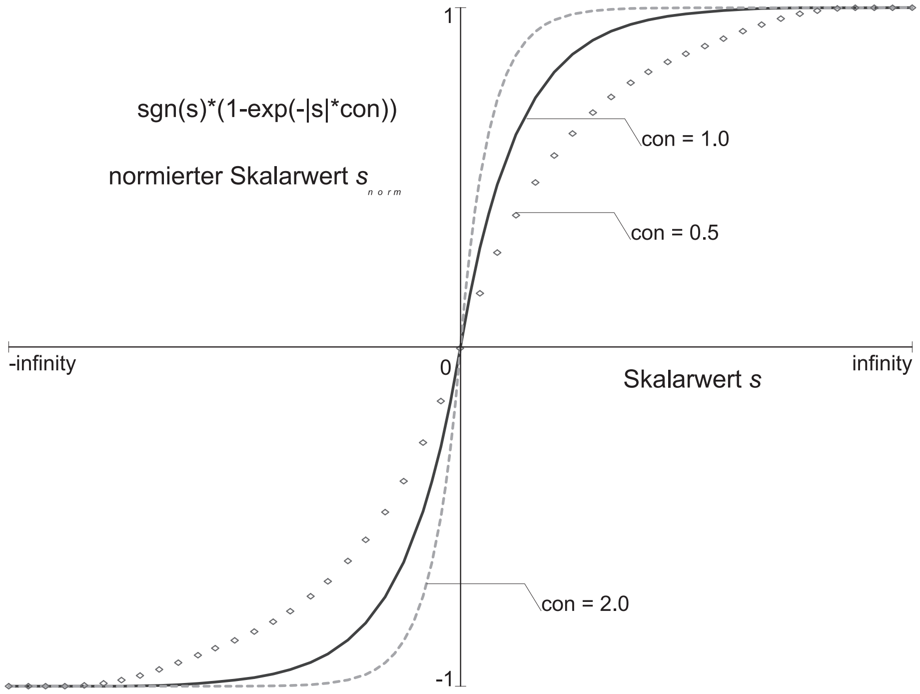


Abbildung 5.1: Normierungsfunktion mit verschiedenen Konvergenzparametern.

Hierbei stellt s_{norm} den normierten Skalarwert von s dar. Da für das Krümmungsfeld im 3D immer $\kappa(V) \geq 0$ gilt, kann man für diesen Fall schreiben:

$$\kappa_{norm} = (1 - e^{-\kappa \cdot con}) \tag{5.2}$$

Folgende Transformationen finden statt:

$$\text{mit } (5.1) \qquad [-\infty, \infty] \rightarrow [-1, 1] \tag{5.3}$$

$$\text{mit } (5.2) \qquad [0, \infty] \rightarrow [0, 1] \tag{5.4}$$

Der in (5.1) und (5.2) benutzte Parameter *con* beeinflusst die Konvergenz der Funktion, wie Abbildung 5.1 verdeutlichen soll. Wählt man einen geringen Wert für *con*, so konvergiert die Normierungsfunktion langsamer und die zur Visualisierung ausgewählten, normierten Skalarwerte haben ihre Entsprechung in sehr hohen unnormierten Skalarwerten. Diese wiederum findet man nur in der unmittelbaren Nähe eines kritischen Punktes. Umgekehrt verhält es sich mit einem hohen Wert für *con*. Mittels dieses Parameters ist es dem Nutzer möglich, das Verhältnis der Schwellwerte gegenüber den anderen Skalarwerten im Feld abzustimmen. Somit kann man beispielsweise bei einem Vektorfeld mit mehreren kritischen Punkten die Ausprägungen der kritischen Punkte in den Plots der Skalarfelder mittels eines geringen Wertes für *con* weitestgehend voneinander separieren.

5.1.2 Octree

Im Gegensatz zu den meisten Skalarfeldern weisen die im Kapitel 3 vorgestellten Felder in der Nähe kritischer Punkte Bereiche mit äußerst hoher Varianz auf. Außerhalb dieser Umgebungen ist die Varianz jedoch gering. Um diese Bereiche voneinander zu trennen, werden die zu visualisierenden Skalarfelder mittels eines Octrees unterteilt. Dadurch kann die Umgebung eines kritischen Punktes mit einer hohen Gitterauflösung visualisiert werden und gleichzeitig wird sowohl Speicher als auch Rechenzeit durch diesen Vorverarbeitungsschritt gespart.

Das grundlegende Ziel der Unterteilung mit dem Octree muss es sein, Bereiche mit hoher Krümmung[1] von Bereichen mit niedriger Krümmung zu trennen, wobei die ersteren genauer unterteilt werden sollen. Somit liegt ein MAXIMALWERTKRITERIUM für die Unterteilung eines Teilraumes während des Aufbaus des Octrees nahe. Dabei werden innerhalb des zu untersuchenden Teilraumes schrittweise mehrere Skalarwerte s_i an zufälligen, aber möglichst ausgeglichen verteilten Positionen berechnet. Es sei

$$s_{max}^{abs} = \max\{|s_i| : i = 1 \ldots n\} \tag{5.5}$$

der maximale, absolute Wert aus der Menge der bisher berechneten Skalarwerte s_i dieses Teilraumes.[2] Vor dem Aufbau des Octrees wird ein Schwellwert s_{grenz} festgelegt. Ist nunmehr folgende Ungleichung erfüllt, so wird der Teilraum weiter unterteilt:

$$s_{max}^{abs} \geq s_{grenz} \tag{5.6}$$

Das Kriterium (5.6) wird zusammen mit (5.5) nach jeder Berechnung eines neuen Skalarwertes überprüft, bis die Anzahl der berechneten Skalarwerte n eine vorher angegebene Höchstgrenze n_{max} erreicht. Wurde das Kriterium nicht erfüllt, so wird der betrachtete Bereich des Octrees nicht weiter unterteilt.

Es ist leicht zu sehen, dass das Maximalwertkriterium sehr gut Bereiche hoher und niedriger Krümmung voneinander trennt. Es ergeben sich jedoch folgende Probleme:

- Bei den vorzeichenbehafteten Skalarfeldern finden sich Teilräume, die sowohl positive als auch negative Werte enthalten. Diese Bereiche sind zu unterteilen, um den genauen Verlauf positiver und negativer Krümmung unterscheiden zu können. Jedoch werden beim Maximalwertkriterium nur die absoluten Beträge beachtet, so dass oftmals eine Unterteilung nicht stattfindet.
- In einigen Fällen kann es vorkommen, dass Bereiche hoher Krümmung homogen sind. Unter Verwendung des Maximalwertkriteriums werden diese Bereiche weiter unterteilt, obwohl dies für die Visualisierung nicht notwendig ist.

Somit liegt es nahe, ein Kriterium zu wählen, welches die Varianz der Skalarwerte im zu untersuchenden Teilraum beachtet. Beim sogenannten VARIANZKRITERIUM muss folgende Ungleichung erfüllt sein, damit ein Bereich im Octree

[1] Vereinfachend soll hier „Krümmung“ als Sammelbegriff für Krümmung der Tangentenkurven, Torsion, Gaußsche Krümmung und mittlere Krümmung fungieren.

[2] Man beachte, dass einige der betrachteten Skalarfelder vorzeichenbehaftete Werte liefern, so dass in (5.5) die Bestimmung des Betrages notwendig ist.

weiter unterteilt wird:[3]

$$\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(s_i-\mu)^2} \geq \delta_{grenz} \tag{5.7}$$

mit dem Mittelwert

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i \tag{5.8}$$

Hierbei sei δ_{grenz} ein zu wählender Schwellwert und n die Anzahl der berechneten Skalarwerte s_i. Analog zum Maximalwertkriterium werden auch hier höchstens n_{max} Skalarwerte berechnet. Wurde das Kriterium bis dahin nicht erfüllt, so wird der Teilraum nicht unterteilt.

Das Varianzkriterium löst die beim Maximalwertkriterium angesprochenen Probleme, jedoch ist es sehr aufwendig zu berechnen. Eine einfachere Lösung bietet das MAXIMALDIFFERENZKRITERIUM. Hierbei werden zunächst minimaler und maximaler Skalarwert bestimmt:

$$s_{min} = \min\{s_i : i = 1\ldots n\} \tag{5.9}$$
$$s_{max} = \max\{s_i : i = 1\ldots n\} \tag{5.10}$$

Der zu untersuchende Teilraum wird unterteilt, falls folgende Ungleichung für einen festzulegenden Schwellwert d_{grenz} erfüllt ist:

$$|s_{max} - s_{min}| \geq d_{grenz} \tag{5.11}$$

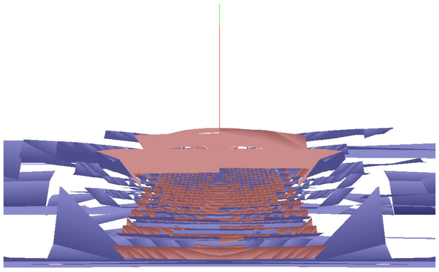
Dieses Kriterium ermöglicht, dass sowohl Bereiche mit niedriger Krümmung als auch homogene Teilräume nicht weiter unterteilt werden. Weiterhin werden in vorzeichenbehafteten Skalarfeldern Bereiche positiver und negativer Krümmung weitaus besser unterteilt, da das Vorzeichen der Skalarwerte in die Berechnung einbezogen wird. Einen praktischen Vergleich von Maximalwert- und Maximaldifferenzkriterium zeigt Abbildung 5.2. Es handelt sich dabei um ein Gaußsches Krümmungsfeld, bei dem ein Bereich positiver Gaußscher Krümmung in einen Bereich mit negativer Krümmung „eingebettet“ ist (Abbildung 5.2c). Vergleicht man die Abbildungen 5.2a und 5.2b mit dem Referenzbild 5.2d, dann erkennt man, dass das Maximaldifferenzkriterium die beiden Bereiche wesentlich genauer voneinander abtrennt, indem in diesem Bereich der Octree tiefer unterteilt wird.

In der diese Arbeit begleitenden Implementation wurden das Maximalwert- und das Maximaldifferenzkriterium umgesetzt.[4]

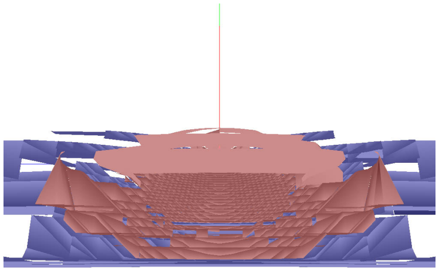
Da die betrachteten Skalarfelder in der Nähe kritischer Punkte divergieren, würden obige Kriterien allein nicht reichen, um die Unterteilung des Octrees ab

[3]Beim Varianzkriterium wird nicht die Varianz selbst berechnet, sondern die Standardabweichung (mittlere quadratische Abweichung). Jedoch besteht ein simpler Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen: Die Varianz ist das Quadrat der Standardabweichung. Zur Benennung dieses Kriteriums wurde jedoch ein einfacher Name gesucht.

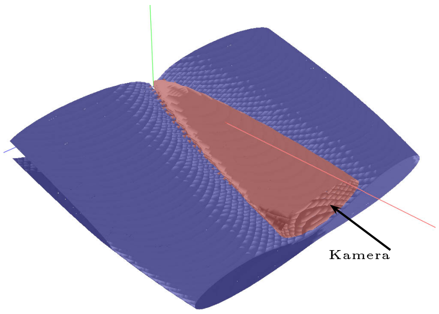
[4]Die Berechnung des Varianzkriteriums wurde lediglich im Quelltext vorgesehen und kann jederzeit (wie auch andere Kriterien) hinzugefügt werden.



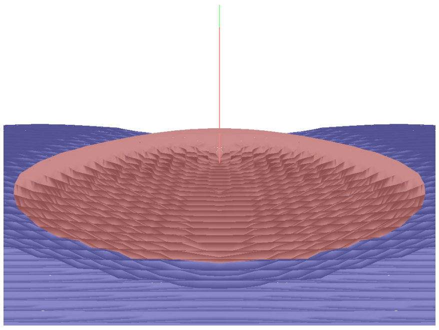
(a) Maximalwertkriterium



(b) Maximaldifferenzkriterium



(c) Überblick über die Szene



(d) Referenzbild

Abbildung 5.2: Maximalwert- und Maximaldifferenzkriterium im Vergleich. Gaußplots des linearen Vektorfeldes $V^\ell = (x + 4y, y, z)^T$ mit einem kritischen Punkt der Klasse 5 (RLogS, RS). Positive Krümmung ist rot, negative blau dargestellt. Alle Bilder wurden mittels einer Isoflächenextraktion (Marching Cubes - siehe Abschnitt 5.1.3) unter Nutzung identischer Visualisierungsparameter erstellt. Die Parameter für den Octree Aufbau unterscheiden sich: Für die Abbildungen (c) und (d) wurde ein bis zur 6. Ebene vollständig aufgebauter Octree verwendet. Diese Darstellungen sollen als Referenz und Überblick zum Verständnis der Abbildungen (a) und (b) beitragen, zu deren Erstellung zwei verschiedene Octrees genutzt wurden, die mit unterschiedlichen Unterteilungskriterien (wie in den Unterschriften angegeben) aufgebaut wurden. Die anderen Parameter zum Aufbau dieser Octrees wurden identisch für (a) und (b) gewählt: Die minimale Unterteilungstiefe des Octrees ist 3; die maximale 8. Als Schwellwert wurde für beide Kriterien der Wert 25 gewählt.

einer gewissen Tiefe zu unterbinden und somit den Algorithmus zu beenden. Dazu wird eine maximale Unterteilungstiefe O_{max} vor Beginn des Octreeaufbaus angegeben. Um weiterhin eine gewisse Grundauflösung im Octree zu garantieren, wird zudem eine minimale Unterteilungstiefe O_{min} festgelegt. Das gewählte Kriterium wird somit nur zwischen diesen Ebenen im Octree berechnet und ausgewertet.

Im Abschnitt 5.1.1 wurde die Normierung der Skalarwerte beschrieben. Für den Aufbau und die Speicherung des Octrees ergibt dies nun die Frage, ob normierte oder unnormierte Werte dazu genutzt werden sollen. Die Entscheidung fällt in beiden Zusammenhängen zugunsten der unnormierten Werte aus, um den algorithmisch komplexen Aufbau des Octrees unabhängig von der Normierung zu belassen, welche den Nutzer zur schnellen Beeinflussung der Visualisierung verhelfen soll.

5.1.3 Visualisierungstechniken

Zur Visualisierung der im Kapitel 3 vorgestellten Skalarfelder wurden verschiedene Techniken untersucht. Diese lassen sich zunächst in zwei Kategorien einteilen:

1. Die Skalarwerte werden benutzt, um vorgegebene Parameter einer Darstellung (wie Geometrie, Farbe oder Transparenz) zu manipulieren.

2. Die Skalarwerte werden mittels bekannter Techniken der Volumen- bzw. Isoflächenvisualisierung dargestellt.

Die Manipulation von Parametern einer Darstellung beruht auf einem von Holger Theisel und Matthias Kreuseler in [TK98] vorgestellten Modell zur Informationsvisualisierung. Im wesentlichen wird hierbei jedem Objekt eines Datensatzes eine Kugel zugeordnet, deren Oberfläche entsprechend der Objekteigenschaften deformiert wird. Dieser Ansatz führt in dieser Arbeit zur Betrachtung einer neuen Technik zur Visualisierung von Skalarfeldern, die Distorted Sphere genannt werden soll.

Distorted Sphere

Definition. *Seien $K \in \mathbb{E}^3$ ein bestimmter Punkt und $S : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$ ein beliebiges, in der Umgebung von K stetiges 3D-Skalarfeld. Weiterhin sei $P \in \mathbb{E}^3$ ein beliebiger Punkt der Kugeloberfläche $O_K \subseteq \mathbb{E}^3$ mit dem Radius r_{O_K} und dem Kugelmittelpunkt K, der mittels zweier Winkel $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \lambda < 2\pi$ folgendermaßen beschrieben werden kann:*

$$P = K + r_{O_K} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cdot \cos(\lambda) \\ \cos(\phi) \cdot \sin(\lambda) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Sei $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige, stetige Funktion mit nicht-negativem, begrenztem Wertebereich. Als deformierte Kugeloberfläche O_K^ξ von S bezüglich

K UND ξ bezeichnet man dann alle Punkte P', für die gilt:

$$P' = K + \left(\xi(S(P)) \cdot r_{O_K}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cdot \cos(\lambda) \\ \cos(\phi) \cdot \sin(\lambda) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Hierbei wird ξ DEFORMIERENDE BEWERTUNGSFUNKTION genannt.

Diese Definition soll anhand der praktischen Umsetzung zur Approximation einer deformierten Kugeloberfläche erläutert werden. Man stelle sich ein Vektorfeld V mit einer Menge kritischer Punkte $\mathbb{K}$ vor. Seien weiterhin $S(V)$ eines der bekannten Skalarfelder aus Kapitel 3 und $K \in \mathbb{K}$ ein kritischer Punkt von V. Zur Visualisierung der Topologie von K stelle man sich weiterhin eine aus Dreieckspatches zusammengesetzte Kugeloberfläche O_K mit dem Radius r_{O_K} vor, wobei K den Mittelpunkt der Kugel darstellt. Somit befinden sich n Dreieckseckpunkte auf O_K. Nun sei R_i ein Strahl mit Beginn in K, der durch einen Dreieckseckpunkt P_i von O_K führt. Entsprechend des Skalarwertes $S(P_i)$ wird P_i auf dem Strahl verschoben; besonders hohe Skalarwerte führen zu einer Vergrößerung des Abstandes zwischen K und P_i, während kleinere Werte diesen Abstand verringern. Dies kann anhand eines vorher festgelegten Schwellwertes im Zusammenhang mit einer Bewertungsfunktion ξ geschehen. Eine derart deformierte Kugeloberfläche enthält somit Informationen über das Verhalten des Skalarfeldes in der Umgebung des kritischen Punktes. Dieses Verfahren wird für alle $K \in \mathbb{K}$ durchgeführt.

Es ist leicht zu sehen, dass die Genauigkeit der geometrischen Darstellung von der Anzahl der Dreieckseckpunkte auf O_K und der Stärke der Verzerrung abhängig ist. Weiterhin sollten die zur Deformation benutzten Skalarwerte normiert sein, um eine zu starke Verzerrung (aufgrund der Divergenz der Skalarfelder in der Nähe kritischer Punkte) auszuschliessen.

Bei einer Vielzahl kritischer Punkte in einem Vektorfeld ist mit dem Verfahren der Distorted Sphere eine sehr genaue Separation möglich, da die Radii der Kugeloberflächen so verändert werden können, dass eine gegenseitige Beeinflussung nicht erfolgt. Ein weiterer Vorteil dieser Technik besteht darin, dass kein Octree (oder eine andere Art der Raumunterteilung) aufgebaut werden muss. Lediglich eine Liste mit Dreiecken muss verwaltet werden. Somit sind Speicher- und Darstellungsaufwand dieser Technik vergleichsweise gering.

Jedoch sind auch zwei Aspekte zu beachten, die unter bestimmten Umständen große Nachteile der Distorted Sphere darstellen können. Zum einen ist die Kenntnis der kritischen Punkte eines Vektorfeldes erforderlich, die bei allgemeinen Vektorfeldern nur numerisch erlangt werden kann. Zum anderen stellt die gewonnene Visualisierung nicht die Isoflächen o.ä. (Definition siehe weiter unten) des Skalarfeldes dar, was sowohl die Interpretation als auch die Akzeptanz der Darstellung wesentlich erschwert.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Visualisierungstechnik der Distorted Sphere jedoch nicht implementiert. Dafür wurden zwei andere, in vielen Bereichen der Visualisierung eingesetzte Standardtechniken umgesetzt, die im folgenden beschrieben werden.

Marching Cubes auf Octree

Definition. *Seien S ein 3D-Skalarfeld und s ein im Wertebereich von S liegender Skalarwert. Eine Fläche $I_F^s \subseteq \mathbb{E}^3$ wird als* Isofläche von S bezüglich s *bezeichnet, wenn an allen Punkten $P \in I_F^s$ gilt:*

$$S(P) = s$$

Der Skalarwert s wird Isowert *genannt.*

Eine Isofläche stellt also die Punkte eines Skalarfeldes dar, an denen es einen bestimmten Wert annimmt. Eine solche Fläche muss nicht geschlossen sein; sie kann sogar aus mehreren, nicht miteinander verbundenen Flächenstücken bestehen. Weiterhin gilt, dass mehrere Isoflächen sich nicht schneiden können. Die Visualisierung von Isoflächen ermöglicht Aussagen über das Verhalten bzw. die Eigenschaften eines Skalarfeldes und wird häufig im Bereich der Volumenvisualisierung eingesetzt. Da sich Isoflächen i.a. nicht geschlossen analytisch beschreiben lassen, müssen approximative Verfahren zur Extraktion solcher Flächen verwendet werden.

Das Verfahren der Marching Cubes ist eine klassische Technik zur Isoflächenextraktion und beispielsweise in [LC87] und [SM00] beschrieben. Wendet man dieses Verfahren jedoch auf einer unregelmäßigen Gitterstruktur wie beispielsweise dem Octree an, so entstehen an den Übergängen zwischen kleineren und größeren Zellen sogenannte Cracks. Hierbei handelt es sich um Stellen, an denen die durch den Marching Cubes gewonnene Isofläche nicht geschlossen ist, da die Dreiecke an der Grenze der Zellen keine gemeinsame Kante haben. Für dieses Problem gibt es im Rahmen dieser Arbeit zwei Lösungsmöglichkeiten:

1. **Explizite Crackbehandlung:** Es werden die Stellen im Octree gesucht, an denen verschieden große Zellen aneinanderstoßen. Läuft durch diesen Teil des Raumes eine Isofläche, so wird auf Vorhandensein eines Cracks mittels Untersuchung der Dreieckskanten getestet. Ist ein Crack vorhanden, so werden die Dreieckskanten (i.a. ist es eine) der größeren Zelle mittels Einführung neuer Dreiecke an die der kleineren Zellen angepasst. Die Isofläche wird sozusagen an der Stelle des Cracks „zusammengezogen“. Dieses Verfahren liefert zwar kein geometrisch, jedoch topologisch korrektes Ergebnis. Weitere Ausführungen zu diesem Thema findet man in [Köl00].

2. **Marching Cubes mit Octree als Wegweiser:**[5] Bekannterweise entstehen Cracks durch verschieden große Zellen. Somit ist es sinnvoll, für die Extraktion der Isoflächen nur gleichgroße Zellen zu verwenden und so bereits die Entstehung von Cracks zu vermeiden. Jedoch ist oftmals der Aufbau einer regulären Gitterstruktur insbesondere im 3D aufgrund der damit verbundenen hohen Speicheranforderungen nicht akzeptabel.

   Isoflächen ohne Cracks und Octree lassen sich vereinen, indem man die Octreestruktur nur als Wegweiser benutzt. Hierbei testet man jede Zelle des Octree daraufhin, ob dieser Teilraum an der zu extrahierenden Isofläche

[5] Ein ähnliches Verfahren wurde in [WG92] zur beschleunigten Ausführung des Marching Cubes Algorithmus mit Hilfe von Octrees vorgestellt.

beteiligt ist. Dies kann beispielsweise mit einem stark vereinfachten Marching Cubes Algorithmus geschehen. Erhält man ein positives Ergebnis (ein Teil der Isofläche befindet sich also in der betrachteten Zelle), so wird ein Marching Cubes auf einem temporär erzeugten regulären Gitter innerhalb dieser Octree-Zelle durchgeführt. Für alle Zellen im Octree muss das temporäre Gitter mit identischen Zellenmaßen aufgebaut werden. Damit ist sichergestellt, dass alle durch den Marching Cubes gewonnenen Dreiecke auf Basis gleichgroßer (temporärer) Zellen extrahiert wurden und die Isofläche keine Cracks enthält.

Dieses Verfahren liefert nicht nur ein topologisch, sondern auch ein geometrisch exaktes Ergebnis. Nachteile sind jedoch die längere Rechenzeit und eine größere Anzahl von extrahierten Dreiecken. Weiterhin genügt der Octree allein nicht als Datenbasis; die Berechnung des Skalarfeldes muss weiterhin zur Verfügung stehen.

Es sei angemerkt, dass in der diese Arbeit begleitenden Implementation keines der oben genannten Verfahren zur Crackbehandlung bzw. -vermeidung umgesetzt wurde, da in der Praxis eine wesentliche Störung der Darstellung durch Cracks nicht beobachtbar war.

Projektion von Isoräumen

Wie im Abschnitt 5.1.2 bereits beschrieben, wird zur Raumunterteilung der betrachteten Skalarfelder ein Octree genutzt. Die direkte Darstellung der Zellen dieser Struktur ist eine weitere Möglichkeit zur Visualisierung der Krümmungsfelder.

Definition. *Sei S ein 3D-Skalarfeld mit dem Wertebereich W_S. Weiterhin seien s und $\epsilon > 0$ beliebige Werte, für die gelte:*

$$(s-\epsilon) \in W_S \qquad \textit{und} \qquad (s+\epsilon) \in W_S$$

Ein Teilraum $I_R^{s\pm\epsilon} \subseteq \mathbb{E}^3$ wird dann als Isoraum von S bezüglich s und ϵ *bezeichnet, wenn an allen Punkten $P \in I_R^{s\pm\epsilon}$ gilt:*

$$S(P) \in [s-\epsilon, s+\epsilon]$$

Hierbei werden der Skalarwert s als Isowert *und ϵ als* Isospanne *bezeichnet.*

Ein Isoraum wird durch die zwei Isoflächen mit den Isowerten $(s-\epsilon)$ und $(s+\epsilon)$ begrenzt. Dementsprechend gelten auch für Isoräume die Aussagen über die Isoflächen: Isoräume müssen nicht geschlossen sein, können sich nicht gegenseitig durchdringen und i.a. nicht geschlossen analytisch beschrieben werden. Mit der Definition der Isoräume kann man eine Isofläche als Grenzwert für $\epsilon \to 0$ betrachten.

Die Darstellung von Isoräumen ist oftmals implementationstechnisch und von der algorithmischen Komplexität her wesentlich einfacher als eine Isoflächenextraktion, da die raumunterteilende Struktur (z.B. Octree) direkt zur Visualisierung verwendet werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit wurde folgende Vorgehensweise zur Approximation eines Isoraumes gewählt: Befindet sich einer der Eckpunkte einer Octreezelle innerhalb des darzustellenden Isoraumes, wird

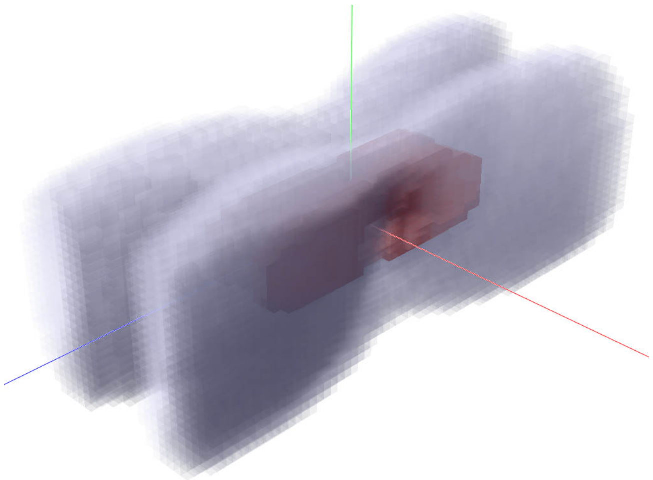


Abbildung 5.3: Krümmungsplot mittels Projektion von Isoräumen. Lineares Beispielvektorfeld $V_1^\ell = (3x, 2y, z)^T$. Für weitere Informationen zum Vektorfeld siehe auch Tabelle 3.1 auf Seite 28. Für diese Darstellung wurden zwei Isoräume festgelegt (normierte Krümmungswerte): (0.9 ± 0.1) und (0.6 ± 0.15).

diese Zelle als Quader dargestellt. Für hinreichend kleine Zellen und schmale Isoräume ($\epsilon \approx 0$) ergibt dies eine Darstellung, die der Isoflächenextraktion ähnelt (Abbildung 5.3).

Ein Vorteil dieser Technik besteht darin, dass neben dem Octree keine weiteren Datenstrukturen aufgebaut werden müssen. Weiterhin lassen sich topologisch unbekannte Skalarfelder mit Hilfe der Projektion von Isoräumen leicht explorieren: Da die Lage der kritischen Punkte nicht bekannt ist, muss das Skalarfeld in einem großen Definitionsbereich berechnet werden. Eine Octreeunterteilung besitzt demnach eine vergleichsweise geringe Auflösung, so dass die Umgebungen der kritischen Punkte i.a. nicht ausreichend für eine Isoflächenextraktion abgetastet wurden. Nutzt man jedoch für diesen Fall die Isoraumprojektion mit einer großen Isospanne, so erkennt man zumindest die Lage der kritischen Punkte. Daraufhin kann man den Definitionsbereich des Skalarfeldes auf die Umgebung eines kritischen Punktes einschränken und eine Isoflächenextraktion zur visuellen Bestimmung der Topologie durchführen.

Ein wesentlicher Nachteil der hier vorgestellten Isoraumprojektion besteht in der geringeren Darstellungsqualität gegenüber den Isoflächen des Marching Cubes. Weiterhin werden wesentlich mehr geometrische Primitive ausgegeben.[6]

[6] Zur Darstellung eines Quaders werden unter Beachtung der Blickrichtung 3 Rechtecke benötigt. Da die meisten Rendering Systeme alle höheren Primitive mittels Dreiecken ausgeben, würde ein derartiger Quader mit 6 Dreiecken dargestellt werden müssen. Beim Marching Cubes ist die durchschnittliche Dreiecksmenge pro emittierender Zelle wesentlich geringer. Weiterhin werden bei der vorgestellten Technik wesentlich mehr Zellen in die Darstellung einbezogen als beim Marching Cubes.

5.1.4 Darstellungselemente

Definition. *Sei S ein beliebiges 3D-Skalarfeld. Weiterhin sei $G \in \{I_F^s, I_R^{s\pm\epsilon}, O_K^\xi\}$ ein geometrisches Gebilde, welches durch eine Isofläche I_F^s, einen Isoraum $I_R^{s\pm\epsilon}$ oder eine deformierte Kugeloberfläche O_K^ξ beschrieben wird. Als* DARSTELLUNGSELEMENT (SKIN) VON S *bezeichnet man dann die Vereinigung von G mit seinen Attributen der Darstellung wie Farbe oder Transparenz.*

Der Begriff des Darstellungselementes soll unabhängig von der verwendeten Visualisierungstechnik als Oberbegriff zur Festlegung von Darstellungsattributen einer Isofläche, eines Isoraumes oder einer deformierten Kugeloberfläche dienen. Eine genaue Auflistung der dieser Attribute hängt stark von der zur Darstellung verwendeten Implementation ab, beinhaltet aber zumindest Materialparameter wie Farbe, Transparenz und bestimmte Reflektionseigenschaften. Mittels dieser Parameter können Informationen über die visualisierten Bereiche in der Darstellung kodiert werden.[7]

Die Transparenz ist für die Visualisierung im 3D ein besonders wichtiges Hilfsmittel, da hiermit Überdeckungen der einzelnen Geometrien sichtbar gemacht werden können. Im Zusammenhang mit der direkten Volumenvisualisierung soll an dieser Stelle ein spezielles Transparenzkonzept erläutert werden: Einem Darstellungselement kann nur *ein* fester Transparenzwert α zugeordnet werden.[8] Es ist leicht zu sehen, dass dies für Isoflächen und deformierte Kugeloberflächen auch Sinn macht. Jedoch werden bei der Visualisierung von Isoräumen sehr viele Quader dargestellt, so dass trotz hoher Transparenz die Geometrien hinter dem Isoraum nicht oder nur noch kaum zu erkennen sind (Abbildung 5.3). Da es sich zudem nur um eine Approximation des Isoraumes handelt, befinden sich nicht alle Eckpunkte der dargestellten Zellen innerhalb des Isoraumes. Eine genauere Approximation und bessere Gesamttransparenz erhält man, indem jedem Eckpunkt P der darzustellenden Zelle ein spezieller Transparenzwert α' zugeordnet wird. Dazu wird folgende Formel vorgeschlagen ($\overline{S}(P)$ sei der normierte Skalarwert am Eckpunkt P):

$$\alpha' = \alpha \cdot |\overline{S}(P)|^\beta \qquad \text{mit} \qquad \beta \geq 0 \tag{5.12}$$

Der Definition des Darstellungselementes wird somit der als ALPHAPOWER bezeichnete Wert β hinzugefügt. In der diese Arbeit begleitenden Implementation wurde dieses Konzept noch nicht umgesetzt.

[7] Beispielsweise werden in den Gaußplots positive Krümmungswerte mittels rötlicher Darstellungselemente (i.a. Isoflächen) und negative Krümmungswerte bläulich kodiert.

[8] Mehrere feste Werte für die Transparenz würden sich nicht sinnvoll den Punkten einer Geometrie zuordnen lassen.

5.2 Visualisierungskette

In diesem Abschnitt wird die zur Visualisierung nötige Reihenfolge der im Abschnitt 5.1 vorgestellten Visualisierungskomponenten erläutert. Eine derartige Reihenfolge zur praktischen Umsetzung der Visualisierung wird VISUALISIERUNGSKETTE (VISUALISIERUNGS-PIPELINE) genannt. Parallel zu den Erläuterungen beachte man Abbildung 5.4.

Zunächst ist zur Anwendung aller vorgestellten Visualisierungstechniken ein Preprozess notwendig, in dem die darzustellenden Daten aufbereitet werden. Bei dem Verfahren der Distorted Sphere müssen hierzu alle kritischen Punkte im Vektorfeld mit Hilfe numerischer Methoden gefunden werden. Marching Cubes und direkte Volumenvisualisierung verlangen eine Raumunterteilung, die mittels des vorgestellten Octree-Verfahrens durchgeführt wird.

Nach der Datenaufbereitung folgt die Phase der Klassifikation, in der die Parameter der Visualisierung festgelegt werden. Die Normierung[9] der Skalarwerte stellt die Basis der Klassifikation dar, weil alle folgenden Festlegungen sich auf normierte Skalarwerte beziehen. Entsprechend der gewählten Visualisierungstechnik werden die Darstellungselemente definiert. Für die Techniken Marching Cubes und Distorted Sphere erfolgt im Anschluss eine Oberflächenextraktion entsprechend der Definition der Darstellungselemente. Zur direkten Volumenvisualisierung wird ein derartiger Prozess nicht benötigt, da der bereits aufgebaute Octree die zu visualisierende Struktur enthält.

Den abschließenden Teil der Visualisierungskette bildet das Rendering und die Darstellung. Im Rahmen der Implementation wurde die Grafikbibliothek OpenGL verwendet. Diese ermöglicht das optimierte Speichern (Kompilieren) von Szenen bzw. OpenGL-Befehlen in sogenannten Displaylisten, mit deren Hilfe eine höhere Darstellungsgeschwindigkeit erreicht wird. Um die Transparenz mit diesem System wirkungsvoll zu implementieren, müssen 8 Displaylisten aus jeweils verschiedenen Blickrichtungen erstellt werden. Dabei werden die Grafikprimitive sortiert nach der Entfernung von der Kamera (beginnend mit dem am weitesten entfernten Primitiv) ausgegeben. Für weitere Informationen über die Umsetzung von Transparenz mittels OpenGL siehe [NDW93].

Nach einem vollständigen Durchlauf der Visualisierungskette, ist die Änderung von Parametern und Auswahlmöglichkeiten an beliebigen Stellen der Kette erlaubt, solange die Voraussetzungen dafür (wie beispielsweise Octree oder die Liste der kritischen Punkte) vorhanden sind.

5.3 Das Visualisierungstool Curvature3D

Die in dieser Arbeit vorgestellten Theorien über die Krümmungsfelder[10] und die Methoden zu deren Visualisierung wurden in dem umfangreichen Programm

[9] Nach klassischen Gesichtspunkten würde die Normierung zur Phase der Datenaufbereitung gehören. In der diese Arbeit begleitenden Implementation stellt die Normierung jedoch keinen autonomen Prozess dar, sondern wird parallel zur Visualisierungstechnik ausgeführt. Man beachte dazu die Ausführungen im Abschnitt 5.1.2 über die Verwendung von unnormierten Skalarfeldern bei der Unterteilung und Speicherung des Octrees.

[10] Der Begriff „Krümmungsfelder“ soll an dieser Stelle vereinfachend als Oberbegriff für die in Kapitel 3 vorgestellten Skalarfelder stehen.

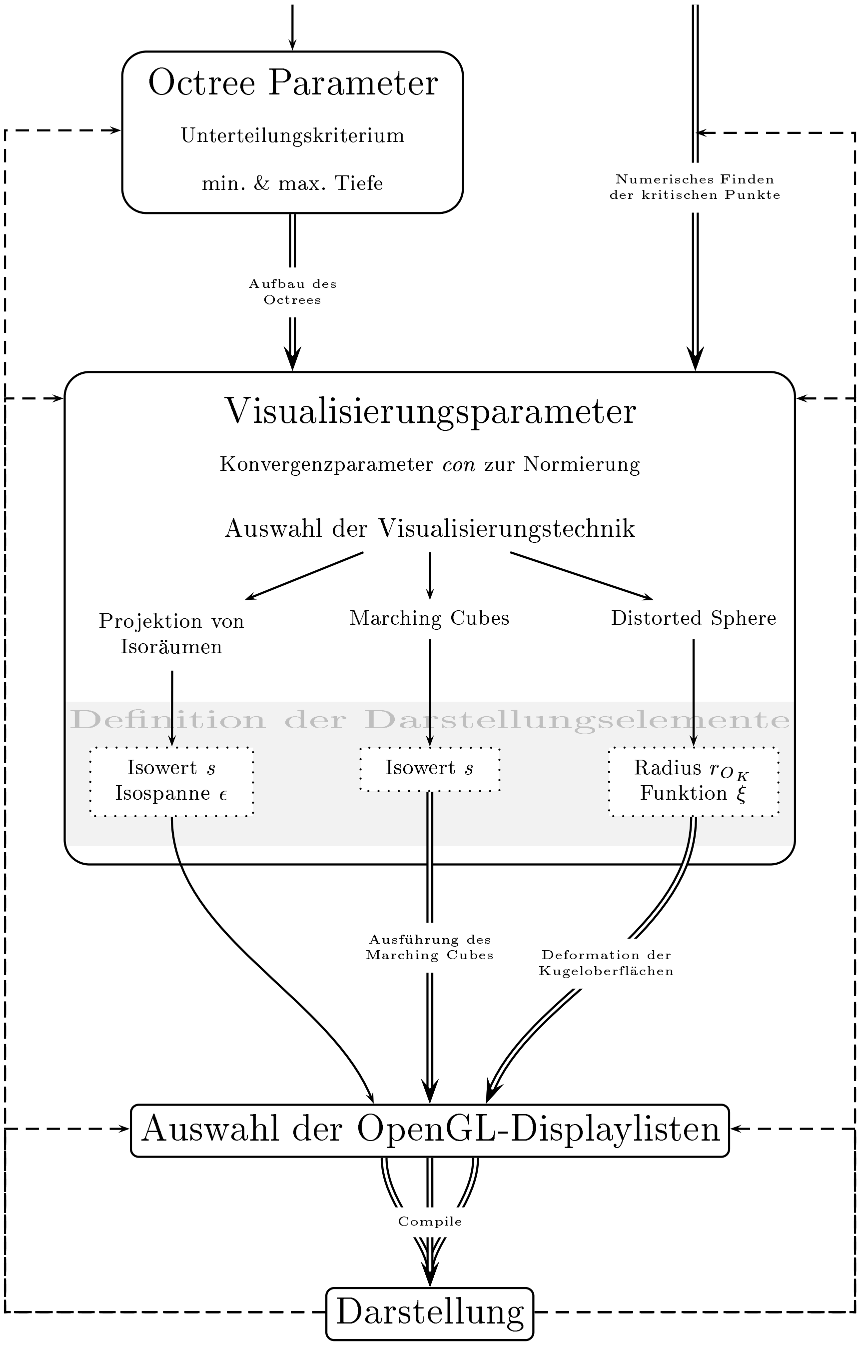


Abbildung 5.4: Visualisierungskette. Mit Doppellinien (⟹)werden Verarbeitungsprozesse symbolisiert.

Curvature3D umgesetzt. In diesem Abschnitt werden Erläuterungen zur Implementation und dem Funktionsumfang des Programmes gegeben.

Curvature3D ist in C++ implementiert und weitestgehend konform zu ANSI C++. Das Programm wurde für die PC-Plattformen Microsoft® Windows NT® 4.0 und Microsoft® Windows® 98 entworfen und getestet, sollte aber auch auf den anderen 32-Bit-Windows Betriebssystemen von Microsoft® lauffähig sein. Allgemeine Voraussetzung für die Nutzung von Curvature3D ist eine OpenGL® Implementation für das jeweilige Betriebssystem.

Die Programmstruktur von Curvature3D setzt sich aus drei wesentlichen Komponenten zusammen, die im folgenden beschrieben werden:

- Grundlage des gesamten Programmaufbaus ist eine für Curvature3D entwickelte, durchgängig objektorientierte OpenGL® Schnittstelle. Es wurden Klassen zur Verwaltung bzw. Emulation von Viewports, Kamera, Licht, Darstellungsoptionen, Szenen, OpenGL-Displaylisten und Oberflächenmaterialien entwickelt. Dieser Teil des Programmes ist ANSI C++ konform.

- Den Hauptteil von Curvature3D stellt eine Klassenbibliothek dar, die alle zur Berechnung und Visualisierung der Krümmungsfelder notwendigen Funktionen implementiert. Dazu gehören einfache Klassen zur Implementation von Punkten, Vektoren, Dreiecken u.ä. mit deren Operatoren (z.B. Vektorprodukt). Darauf bauen komplexere Klassen zur Berechnung bzw. Verwaltung von Vektorfeldern, Skalarfeldern, Visualisierungsoptionen, Darstellungselementen, Octrees etc.

  Zwei Komponenten dieses Programmteils stammen aus anderer Quelle. Dabei handelt es sich zunächst um Routinen von Mark Morley zur Berechnung von Termen mit beliebigen Variablen, die in Form von Strings zur Verfügung stehen. Diese Routinen werden genutzt, um den Anwender von Curvature3D in die Lage zu versetzen, beliebige Funktionen zur Generierung von Vektorfeldern zu nutzen.

  Weiterhin fand eine Marching Cubes Implementation von Holger Theisel in Curvature3D Verwendung, die den Algorithmus für *eine* Zelle ausführt. Der Quelltext wurde leicht angepasst.

  Die Komponenten von Theisel und Morley sind ANSI C konform, während der Rest dieses Programmteils durchgängig objektorientiert mittels ANSI C++ umgesetzt wurde.

- Die Benutzeroberfläche (User Interface) von Curvature3D wurde mit dem Microsoft® Windows® SDK[11] realisiert. Aufgrund der Benutzung von Rebar Controls, muss die Systemdatei `comctl32.dll` mindestens in der Version 4.71 vorliegen. Die Oberfläche des Programmes ist zweigeteilt: Den größten Teil nimmt ein OpenGL-Darstellungsfenster ein, während am rechten Bildschirmrand die Parametermanipulationen in verschieb- und ausblendbaren Dialogen erfolgen. Es wurde darauf geachtet, dass alle Funktionen des Programmes ohne den Aufruf von Menüs und modalen Dialogen erreicht werden können. Somit führt fast jede Parameteränderung in der Oberfläche zu einem sofort sichtbaren Resultat im OpenGL® -Fenster. Die Abbildungen 5.5 und 5.6 zeigen das User Interface und bezeichnen die wichtigsten Funktionen.

[11] Die Microsoft® Foundation Classes (MFC) wurden *nicht* verwendet.

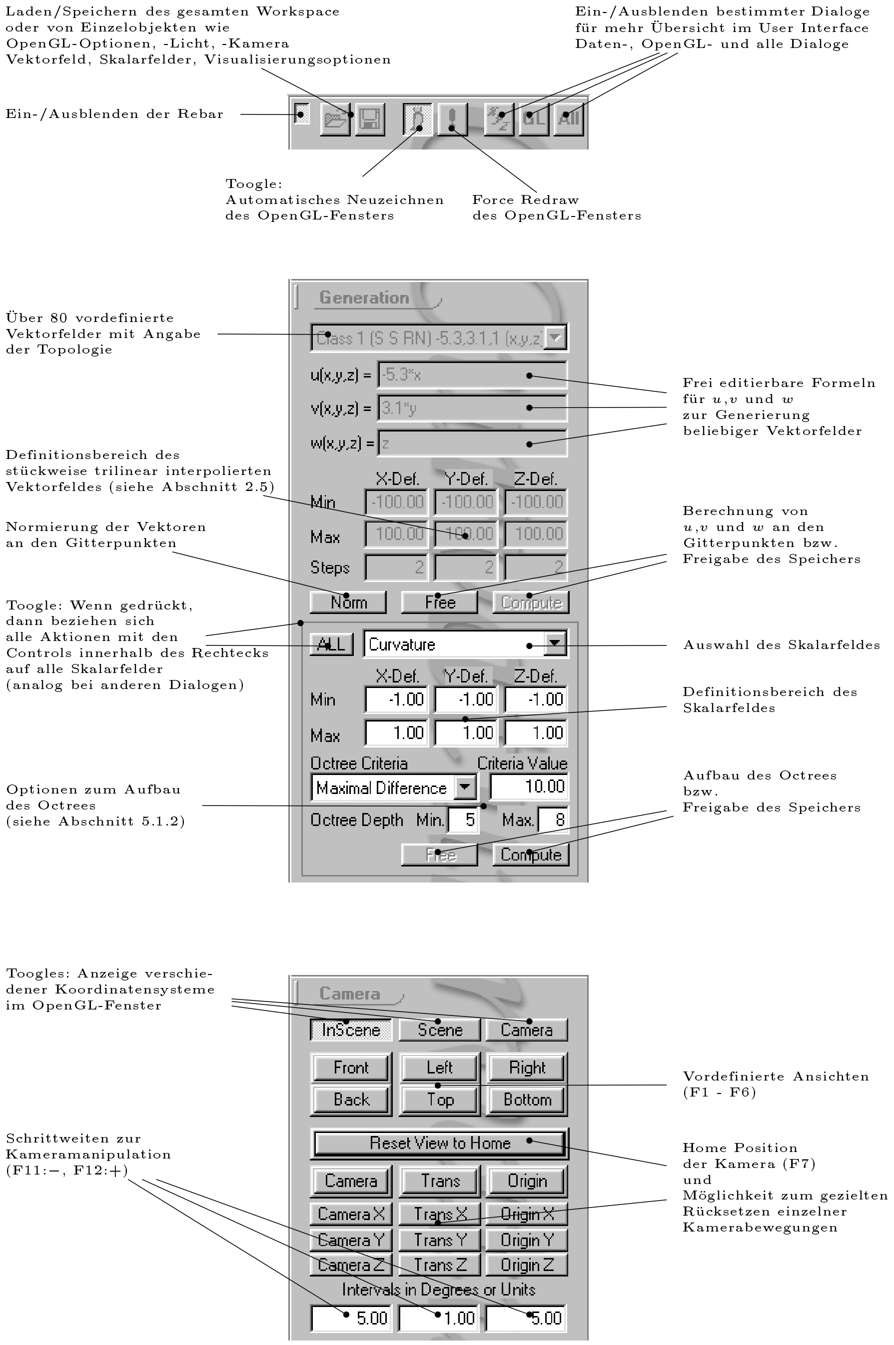


Abbildung 5.5: User Interface von Curvature3D I. Im oberen Teil der Abbildung ist der RebarHead dargestellt, welcher jederzeit sichtbar ist und die Grundfunktionen von Curvature3D zur Vefügung stellt. Darunter die Dialoge zur Datenerzeugung und Kameramanipulation.

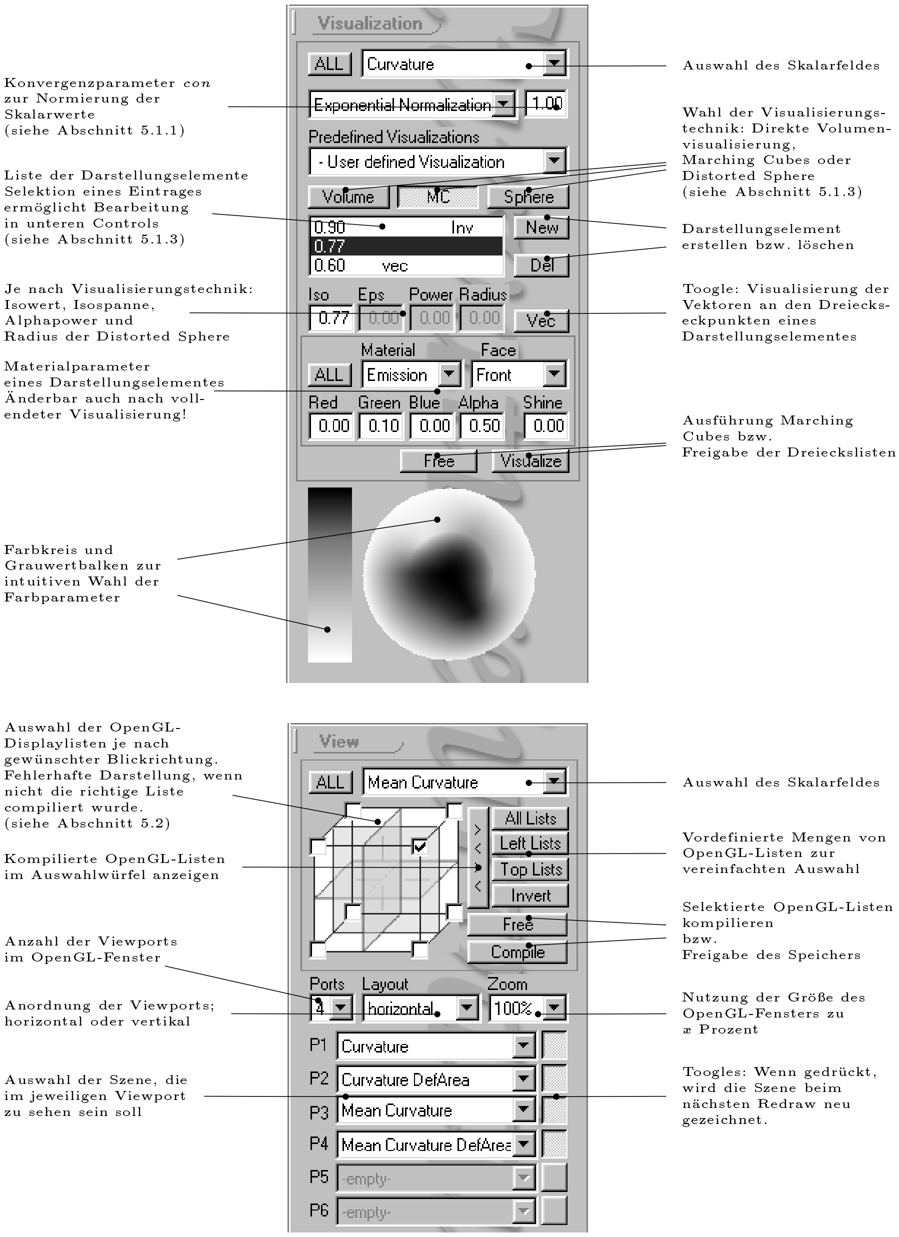


Abbildung 5.6: User Interface von Curvature3D II. Die Dialoge zur Einstellung der Visualisierungsparameter und Verwaltung der Viewports.

Kapitel 6

Evaluierung der Krümmungsplots

Die Visualisierung von Vektorfeldern und ihren Eigenschaften ist ein bedeutendes Thema der wissenschaftlichen Visualisierung, da in vielen Bereichen der Wissenschaft und Technik die Notwendigkeit zur Untersuchung solcher Daten besteht. Eine Vielzahl von Techniken und Methoden wurden für diese Aufgabe entwickelt.[1] Jedoch gibt es bei der Visualisierung von Vektorfeldern ein grundlegendes Problem: Im allgemeinen enthält ein Vektorfeld mehr Informationen, als auf einem Bildschirm darstellbar ist. Somit ist jede derartige Visualisierung abhängig von dem Anwendungsgebiet und der jeweiligen Aufgabenstellung. Bestimmte, für die jeweilige Anwendung wichtige Informationen des Vektorfeldes müssen zunächst ausgewählt werden, bevor eine Visualisierung erfolgen kann. Somit gibt es keine allgemeine Visualisierungstechnik für Vektorfelder, die jeder Aufgabenstellung gerecht wird.

6.1 Klassifikation und State of the Art

Die verschiedenen Methoden zur Visualisierung von Vektorfeldern und ihren Eigenschaften können nach verschiedenen Gesichtspunkten klassifiziert werden. Ein wichtiges Kriterium zur Klassifikation ist die Frage nach dem Ort der Auswertung und Visualisierung von Eigenschaften eines Vektorfeldes. Diese Klassifikation soll im folgenden Ortsklassifikation (OK) genannt werden:

1. Elementare Methoden. Es werden die Eigenschaften von ausgewählten, endlich vielen Punkten eines Vektorfeldes dargestellt.

2. Lokale Methoden. Ausgehend von ausgewählten, endlich vielen Punkten werden die Eigenschaften des Vektorfeldes in der Umgebung dieser Punkte visualisiert.

3. Globale Methoden. Die Eigenschaften des Vektorfeldes werden in dessen gesamten Definitionsbereich dargestellt.

[1]Eine Übersicht über Techniken zur Visualisierung von Vektorfeldern findet man in [PvW93].

Wie bereits erwähnt, können nur ausgewählte Informationen über ein Vektorfeld dargestellt werden. Die Art und Weise der Reduktion von Information soll in der folgenden Auswahlklassifikation (AK) systematisiert werden:

1. Nutzung vektorieller Größen zur Extraktion von Geometrien.
2. Direkte Reduktion durch das Vektorfeld gegebener, vektorieller Größen (z.B. Betrag oder Richtung der Vektoren) auf skalare Größen.
3. Berechnung einer skalaren Eigenschaft des Vektorfeldes.
4. Topologische Analyse.

Desweiteren lassen sich die zur Visualisierung von Vektorfeldern i.a. genutzten Darstellungstechniken in der folgenden Darstellungsklassifikation (DK) zusammenfassen, die jedoch stark abhängig von den zuvor aufgeführten Klassifikationen ist:

1. Darstellung von Ikonen.
2. Nutzung von Techniken zur Darstellung oder Animation der mittels vektorieller Größen extrahierten Geometrien. Dies bezieht sich direkt auf den ersten Punkt der Auswahlklassifikation.
3. Nutzung von Techniken zur Skalarfeldvisualisierung unter den Bedingungen der Punkte 2 und 3 in der Auswahlklassifikation.

Eine insbesonders im 2D weit verbreitete Methode zur Visualisierung von Vektorfeldern ist die Repräsentation der Vektoren mit Pfeilen (OK:1 — AK:1 — DK:2).[2] Diese Methode ist einfach umsetzbar und algorithmisch simpel. Jedoch ergeben sich Probleme mit der schwer bestimmbaren Anzahl der darzustellenden Vektoren, da sowohl zu viel als auch zu wenig Vektorpfeile die Interpretation der Darstellung erschweren. Weiterhin können aufgrund stark unterschiedlicher Magnituden Überlappungen zwischen den Pfeilen auftreten. Im 3D verhindern zusätzlich perspektivische Verzerrungen und abbildungsbedingte Verdeckungen eine exakte Interpretation.

Die Visualisierung von Tangentenkurven (OK:1 — AK:1 — DK:2) wird sowohl im 2D als auch im 3D häufig angewendet. Tangentenkurven beinhalten die Information über die Richtung der Vektoren eines Vektorfeldes und sind deshalb ein wichtiges Mittel zur Darstellung dieser Felder. Im 2D wird diese Methode zumeist für den gesamten Definitionsbereich des Vektorfeldes angewendet, während im 3D aufgrund von möglichen Verdeckungen oftmals nur bestimmte Bereiche in der Nähe kritischer Punkte visualisiert werden. Bei der Visualisierung von Tangentenkurven treten zwei wesentliche Probleme auf:

1. Die Anzahl der darzustellenden Kurven ist schwer zu bestimmen. Zu viele und zu nah beieinander liegende Tangentenkurven verhindern eine klare, eindeutige Darstellung. Andererseits müssen wenigstens so viele Kurven dargestellt werden, dass der Betrachter das Verhalten des Vektorfeldes einschätzen kann.

[2] Die Einordnung einer Methode nach den aufgeführten Klassifikationen wird im folgenden mit dieser Kurzschreibweise abgekürzt. Dabei beziehen sich die Buchstabenkombinationen auf die bei der Vorstellung der Klassifikationen eingeführten Abkürzungen. Die Ziffern bezeichnen die jeweiligen Punkte einer Klassifikation.

2. Bereits im Abschnitt 2.1 wurde erwähnt, dass Tangentenkurven sich i.a. nicht geschlossen analytisch beschreiben lassen. Zur Visualisierung müssen demnach numerische Methoden verwendet werden, die unter bestimmten Umständen die Topologie nicht korrekt erfassen.[3] Einen Ansatz zur numerischen Integration von Tangentenkurven findet man z.B. in [HH89].

Das erste Problem kann durch die Einbringung eines topologischen Ansatzes nach [HH89] gelöst werden. Dazu werden die kritischen Punkte eines Vektorfeldes numerisch detektiert und mittels einer Approximation 1. Ordnung klassifiziert (siehe Abschnitt 2.2). Zwischen diesen mit Ikonen visualisierten Punkten werden dann nur die Separationslinien eingezeichnet; die Darstellung bleibt klar und übersichtlich (OK:2 — AK:4 — DK:1). Für hinreichend komplizierte Vektorfelder versagt diese Methode jedoch, weil dann eine Approximation 1. Ordnung nicht genügt, die Topologie unverfälscht zu beschreiben. Weiterhin basiert diese Methode auf numerischen Algorithmen.

Eine weitere Möglichkeit zur Lösung des ersten Problems ist die Linienintegralfaltung (line integral convolution, LIC), die beispielsweise in [SH95] beschrieben ist (OK:3 — AK:1 — DK:2). Jedoch verwendet auch diese Technik numerische Methoden.

6.2 Die Methode der Krümmungsplots

Es sei zunächst angemerkt, dass die Begriffe „Krümmungsfeld“ und „Krümmungsplot“ in diesem Abschnitt vereinfachend für die in Kapitel 3 vorgestellten Skalarfelder und deren Visualisierungen stehen sollen.

Die Krümmungsfelder stellen skalare Eigenschaften eines Vektorfeldes dar und somit fällt die in dieser Arbeit vorgestellte Methode im Rahmen der Auswahlklassifikation in die Kategorie 3. Zur Darstellung werden Methoden der Skalarfeldvisualisierung benutzt, womit weiterhin die Methode der Krümmungsplots zur Kategorie 3 der Darstellungsklassifikation zu zählen ist.

Die Einordnung in die Ortsklassifikation ist jedoch abhängig von der gewählten Visualisierungstechnik. Bei der Wahl einer Isoflächenextraktion mittels Marching Cubes oder einer direkten Volumenvisualisierung handelt es sich um eine globale Methode, da die Krümmungswerte im gesamten Definitionsbereich des Vektorfeldes betrachtet und bei entsprechender Einstellung der Visualisierungsparameter (Isowert und/oder Isospanne) auch dargestellt werden. Anders verhält es sich jedoch bei der neu eingeführten Visualisierungstechnik Distorted Sphere. Hierbei werden nur die Krümmungswerte in der Nähe kritischer Punkte betrachtet und somit ist die Methode der Krümmungsplots bei der Wahl dieser Technik eine lokale Methode.

Vorteile

Wie bereits erwähnt, haben Tangentenkurven eine hohe topologische Aussagekraft. Mit Hilfe der Krümmungsplots werden zwar nicht die Tangentenkur-

[3] Man stelle sich hierzu beispielsweise im 2D eine Focus-Topologie vor (Abbildung 2.1b), deren Spiralen bei jeder Umkreisung des kritischen Punktes sich nur wenig diesem nähern. Eine falsch parametrisierte numerische Lösungsmethode könnte diese Topologie als Center (Abbildung 2.1a) darstellen.

ven eines Vektorfeldes visualisiert, jedoch zwei ihrer wesentlichsten Merkmale: Krümmung und Torsion. Die Berechnung dieser Merkmale erfolgt „exakt", d.h. unter Ausschluss numerischer Algorithmen. Dies ist im Vergleich zur direkten Visualisierung von Tangentenkurven ein wesentlicher Vorteil.

Weiterhin kann nach Satz 7 jeder nicht degenerierte kritische Punkt eines linearen Vektorfeldes in zumindest einem der Krümmungsplots als Formation hoher Krümmungswerte erkannt werden. Es ist anzunehmen, dass dies auch für allgemeine Vektorfelder gilt (analog zum 2D).

Das mittlere Krümmungsfeld ermöglicht nach Satz 8 topologische Aussagen. Dies wurde für kanonische Vektorfelder nachgewiesen, jedoch ist auch hier anzunehmen, dass dies im Zusammenhang mit weiteren Krümmungsfeldern für lineare oder allgemeine Vektorfelder ebenso gilt.

Nachteile

Die Methode der Krümmungsplots hat jedoch auch Nachteile. Benutzt man sie zur topologischen Untersuchung eines Vektorfeldes, so sind zumeist mehrere 3D-Ansichten von verschiedenen Plots nötig, um die Topologie zu bestimmen. Dies stellt die Forderung an den Betrachter, diese Ansichten mental zu kombinieren und zusätzlich aus den dargestellten Geometrien eine Aussage hinsichtlich der Topologie abzuleiten. Dies scheint insbesondere für allgemeine Vektorfelder mit mehreren kritischen Punkten eine schwer lösbare Aufgabe zu sein. Weiterhin liefern die Visualisierungen der vorgestellten Skalarfelder keine direkte Information über die Richtung der Vektoren im Vektorfeld. Hierzu ist eine Kombination mit Methoden zur Tangentenkurven- oder Vektordarstellung notwendig.

Die Berechnung der Skalarfelder erfolgt nicht-numerisch, jedoch basieren Teile der Visualisierung (z.B. der Octree) auf numerischen Methoden. Bei einer falschen Wahl der Parameter für die Visualisierung können kritische Punkte in den Krümmungsplots unter Umständen nicht wahrgenommen werden.

6.2.1 Untersuchung von Beispielen

In diesem Abschnitt sollen die Krümmungsplots einiger Vektorfelder im topologischen Zusammenhang erläutert werden. Die zugehörigen Abbildungen findet man im Anhang C. Man beachte die über die Visualisierung dieser Beispiele gemachten Aussagen am Anfang dieses Anhangs. Es sei angemerkt, dass sich alle weiteren Erläuterungen nur auf die im Anhang C dargestellten Beispiele beziehen und nicht zwangsläufig allgemeine Aussagen beinhalten.

Betrachtet man alle Meanplots in den Abbildungen, so fällt auf, dass alle Attracting-Topologien positive und alle Repelling-Topologien negative mittlere Krümmung aufweisen. Weiterhin fällt auf, dass mittels der anderen 3 Krümmungsfelder keine Unterscheidung zwischen inversen Vektorfeldern möglich ist, was teilweise im Kapitel 3 begründet wurde (z.B. Abbildungen C.13 und C.14).

Klasse 1

Bei den Torsionsplots zur topologischen Klasse 1 fällt auf, dass sich 8 Bereiche positiver und negativer Torsion ausbilden, die sich in denen durch die Eigenvektoren definierten Oktanten jeweils gegenüberstehen (Abbildungen C.1 bis C.4). In den Krümmungsplots der Klasse 1 sieht man, dass die Krümmung in den Eigenebenen mit Node-Topologien nahezu Null ist, während die Eigenebenen mit Saddle-Topologien sehr hohe Krümmungswerte aufweisen (Abbildungen C.1 bis C.4).

Die Gaußplots in den Beispielen der Klasse 1 weisen für die Node-Ebenen eiförmige Geometrien auf (Abbildungen C.1 bis C.4). Die Saddle-Topologien lassen sich mit Hilfe der Gaußplots in den Beispielvektorfeldern sehr gut bestimmen. Man stelle sich in den Gaußplots der Abbildungen C.3 und C.4 eine Saddle-Ebene als Schnitt durch das Skalarfeld vor. Es ist leicht zu erkennen, dass sich in dieser Schnittebene sowohl positive als auch negative Gaußsche Krümmung ausprägt. Im Gegensatz dazu enthält die Schnittebene der Node-Topologie nur negative Werte.

Die Meanplots zeigen für die Vektorfelder der Abbildungen C.1 und C.2 eiförmige Geometrien. In den darauffolgenden zwei Abbildungen sind die mittleren Krümmungswerte in der Node-Ebene vergleichsweise niedrig und entgegengesetzt zu den Werten der Saddle-Ebenen.

Die Torsionsplots der Beispiele zur topologischen Klasse 2 verdeutlichen die Aussage von Satz 2. Für diese Klasse ist die Torsion konstant Null. Weiterhin zeigen die Bilder, dass die Torsion an einigen Stellen nicht definiert ist. Man beachte dazu die Ausführungen über die Visualisierung der Beispiele am Anfang von Anhang C. Klasse 2

Da die Krümmung der Tangentenkurven für exakte Star-Topologien[4] immer Null ist (simple Folgerung aus Satz 1), enthält ein Schnitt durch die Ebene der Star-Topologie in den Abbildungen C.5 bis C.8 nur Nullkrümmung. Diese Ebene wird auch sehr gut in den Torsionsplots als Bereich nicht definierter Torsion dargestellt.

Im Gegensatz zur Klasse 1 kann man die Geometrien der Gaußplots in den Abbildungen C.5 bis C.8 nicht einfach als eiförmig beschreiben: In der Ebene der Star-Topologie bildet sich eine exakt kreisförmige Formation heraus. Man beachte, dass diese Ebene durch die zwei Eigenvektoren eines Eigenwertes aufgespannt wird. Für die Node- und Saddle-Topologien ergeben sich zur Klasse 1 analoge Beobachtungen. Auch in den Meanplots dieser Beispiele erkennt man in der Star-Ebene oder den dazu parallelen Ebenen kreisförmige Formationen. Ansonsten ergeben sich auch hier zur Klasse 1 analoge Beobachtungen.

In den Torsionsplots der zur Klasse 3 gehörigen Beispielvektorfelder erkennt man die Ausprägung von 4 separierten Bereichen, wobei jeweils 2 Bereiche positive und 2 negative Werte aufweisen. Negative und positive Torsion werden in den Beispielen durch die Ebene der LogStar-Topologie getrennt (Abbildungen C.9 bis C.12). Die Krümmungsplots zeigen beim Auftreten von Node-Topologien zwei eiförmige Formationen. Beim Auftreten von Saddle-Topologien erkennt man in diesen Plots, dass die Krümmungswerte in der Ebene der LogStar-Topologie sehr niedrig sind. Weiterhin scheint sich das Krümmungsfeld in allen 4 Beispielen der Klasse 3 spiegelsymmetrisch zur Ebene der Star-Topologie zu verhalten. Klasse 3

In den Mean- und Gaußplots der Klasse 3 erkennt man analog zu den ersten beiden Klassen eiförmige Formationen beim Auftreten von Node-Topologien. Es treten hier zudem nur Skalarwerte gleichen Vorzeichens auf. Dies ändert sich,

[4]Unter einer exakten Star-Topologie werden Tangentenkurven verstanden, die in Form von Geraden in den kritischen Punkt hinein- bzw. aus ihm herauslaufen. Man betrachte dazu die Skizzen der Star-Topologien in Abbildung 2.2 auf Seite 17.

wenn sich Saddle-Topologien anstelle der Node-Topologien in den Beispielvektorfeldern befinden (Abbildungen C.9 bis C.12).

Klasse 4 Die Plots der Klasse 4 lassen sich visuell sehr leicht von denen anderer Klassen unterscheiden, da die Krümmung der Tangentenkurven in dieser Klasse konstant Null und die Torsion somit nicht definiert ist. Weiterhin stellen die Isoflächen der Mean- und Gaußplots Kugeln dar. Es ist leicht zu zeigen, dass die Normalenflächen bei Vektorfeldern dieser Klasse immer Kugeloberflächen sind. Da die mittlere und Gaußsche Krümmung auf solchen Flächen immer konstant ist, ergeben sich auch für die Isoflächen dieser Skalarfelder Kugeloberflächen (Abbildungen C.13 und C.14).

Klasse 5 Für die Torsionsplots der Klasse 5 gelten die zur Klasse 2 gemachten Aussagen. In den Krümmungsplots der beiden Beispiele zu dieser Klasse bilden sich zwei Formationen heraus. Man kann diese Formationen mittels einer zu bestimmenden Ebene so schneiden, dass sich auf dieser Ebene ellipsenartige[5] Isolinien ergeben. Dies gilt auch für die Mean- und Gaußplots dieser Beispiele. Weiterhin erkennt man, dass nur Skalarwerte jeweils gleichen Vorzeichens im mittleren und im Gaußschen Krümmungsfeld vorkommen. Die Unterscheidung zwischen Attracting- und Repelling-Topologie erfolgt (wie auch in allen anderen Beispielen) anhand des Meanplots (Abbildungen C.15 und C.16).

Klasse 6 In den Beispielen der Klasse 6 zeigt sich in den Krümmungs-, Mean- und Gaußplots jeweils nur eine Formation gleichen Vorzeichens (Abbildungen C.17 und C.18). Anders verhält es sich im Torsionsfeld. Hier bilden sich zwei Bereiche unterschiedlichen Vorzeichens heraus, die zumindest visuell punktsymmetrisch zum kritischen Punkt sind.

Klasse 7 Die Topologie des Centers der Klasse 7 lässt sich leicht anhand des Gaußplots bestimmen, da dies nach Satz 4 der einzige Fall ist, in dem das Gaußsche Krümmungsfeld konstant Null ist (Abbildung C.21). Die Focus-Topologien bilden im Gaußplot je nach Wahl der Parameter zur Definition des Vektorfeldes entweder eine visuell exakt eiförmige Formation oder zwei positive Bereiche, die durch eine negative Formation getrennt werden (Abbildungen C.19 und C.20). Ähnliches läßt sich für die Meanplots dieser Beispiele sagen: Es bilden sich entweder eine eiförmige oder zwei voneinander getrennte Formationen aus. Man beachte beim Betrachten der Abbildungen, dass diese Aussagen nicht den Unterschied zwischen Repelling- und Attracting-Focus ausmachen, wie man eventuell vermuten könnte. Diese Beobachtungen lassen sich bei beiden Topologien zeigen und die einzige Unterscheidungsmöglichkeit zwischen Repelling- und Attracting-Focus ist im Vorzeichen der mittleren Krümmung zu finden.

In den Krümmungsplots der Klasse 7 bildet sich eine eiförmige Formation heraus, wobei diese Formation in bestimmten Fällen eine Deformation in der Eigenebene der jeweiligen Topologie aufweist (Abbildung C.19). Die Torsionsplots der Klasse 7 zeigen zwei entlang der Topologie-Ebene spiegelsymmetrische Formationen mit unterschiedlichen Vorzeichen. In der Topologie-Ebene selbst ist die Torsion Null.

Die vorgestellten Beispiele verdeutlichen, dass zur topologischen Untersuchung von Vektorfeldern unter anderem folgende visuelle Aspekte in den Plots der vorgestellten Skalarfelder eine Bedeutung zu scheinen haben:

[5]Es ist nicht bekannt, ob sich diese Isolinien tatsächlich durch Ellipsen beschreiben lassen. Gemeint ist vielmehr, dass der viuelle Eindruck dem einer Ellipse nahe kommt.

- Unterscheidung von kreis- und ellipsenartigen Formationen im Schnitt bzw. kugel- und eiförmigen Formationen im 3D.
- Anzahl von Formationen.
- Größe von Formationen.
- Symmetrien von Formationen.
- Unterscheidung von Formationen bzw. Bereichen positiver und negativer Skalarwerte.
- Feststellung von Bereichen, in denen die Skalarwerte Null sind.
- Feststellung von Bereichen, in denen ein Skalarfeld nicht definiert ist.

Kapitel 7

Ausblick

Diese Arbeit lässt die folgenden Fragen für weitere Untersuchungen offen:

- Die Beweise zum Divergenzverhalten der eingeführten Skalarfelder im Kapitel 3 sollten auch für allgemeine Vektorfelder geführt werden. Darauf aufbauend muss eine Menge dieser Skalarfelder gefunden werden, die allgemeine Vektorfelder eindeutig beschreibt.
- Nachdem bereits nachgewiesen wurde, dass die mittlere Krümmung kanonische Vektorfelder eindeutig beschreibt, ist zu zeigen, wie die Meanplots zur topologischen Untersuchung solcher Vektorfelder interpretiert werden müssen. Analog ist dies auch für die oben beschriebene Menge von Skalarfeldern zur eindeutigen Beschreibung allgemeiner Vektorfelder zu zeigen.
- In [The95] wurde für 2D-Vektorfelder das Konzept des senkrechten Vektorfeldes eingeführt, um zwei Krümmungsfelder zu definieren, die gemeinsam ein Vektorfeld eindeutig beschreiben. Es wäre interessant zu untersuchen, wie sich das Konzept des senkrechten Vektorfeldes auf 3D-Vektorfelder verallgemeinern lässt. Weiterhin sind dann die daraus resultierenden Krümmungsfelder zu untersuchen.
- In dieser Arbeit wurde das Konzept der Normalenflächen eingeführt. Da sich gezeigt hat, dass die mittlere Krümmung dieser Flächen kanonische Vektorfelder eindeutig beschreibt, scheinen weitergehende Untersuchungen der Eigenschaften von Normalenflächen lohnenswert zu sein.
- Die Visualisierungstechnik der Distorted Sphere wurde in dieser Arbeit eingeführt, jedoch nicht umgesetzt. Eine Implementation und nähere Untersuchungen dieser Technik scheinen lohnenswert. Es ist hierbei auch die Frage zu untersuchen, ob sich diese Technik auch für andere Skalarfelder sinnvoll einsetzen lässt.
- Um die Interpretierbarkeit und Akzeptanz der Krümmungsplots zu verbessern, sollten die Methoden zur Visualisierung der Krümmungsfelder mit bekannten Techniken der Strömungsvisualisierung verbunden werden. Insbesondere die Verknüpfung von Krümmungsplots mit der Darstellung von Tangentenkurven oder Stream Surfaces scheint lohnenswert.

Literaturverzeichnis

[BH98] Rajesh Batra and Lambertus Hesselink, *Feature comparisons of 3-d vector fields using earth mover's distance*, 1998, Proc. IEEE/ACM Visualization '98.

[CPC90] M. S. Chong, A. E. Perry, and B. J. Cantwell, *A general classification of three-dimensional flow fields*, Physics of Fluids A **2** (1990), no. 5, 765–777.

[Far92] Gerald Farin, *Curves and surfaces for computer aided geometric design*, 3rd ed., Academic Press, Boston, 1992.

[FG82] P.A. Firby and C.F. Gardiner, *Surface topology*, ch. 7, pp. 115–135, Ellis Horwood Ltd., 1982, Vector Fields on Surfaces.

[Gel86] W. Gellert, *Kleine enzyklopädie mathematik*, 13th ed., Bibliographisches Institut, Leipzig, 1986.

[HH89] James Helman and Lambertus Hesselink, *Representation and display of vector field topology in fluid flow data sets*, IEEE Computer **22** (1989), no. 8, 27–36.

[Köl00] Martin Köller, *Schwellwertunabhängiges preprocessing für marching cubes*, Master's thesis, University of Rostock, June 2000.

[Lav98] Y. Lavin, *Topology based visualization for vector and tensor fields*, Phd thesis, Stanford University, 1998.

[LBH98] Y. Lavin, R. Batra, and L. Hesselink, *Feature comparisons of vector fields using earth mover's distance*, Proc. IEEE/ACM Visualization '98 (1998), 413–415, North Carolina.

[LC87] W.E. Lorensen and H.E. Cline, *Marching cubes: A high resolution 3d surface reconstruction algorithm*, Computer Graphics **21** (1987), no. 3, 163–169.

[NDW93] Jackie Neider, Tom Davis, and Mason Woo, *Opengl programming guide - the official guide to learning opengl*, 1 ed., Addison-Wesley Publishing Company, 1993, http://arctic.eng.iastate.edu:88/SGI_Developer/OpenGL_PG/.

[PS97] P. A. Philippou and R. N. Strickland, *Vector field analysis and synthesis using three dimensional phase portraits*, Graphical Models and Image Processing **59** (1997), 446–462.

[PvW93] F. Post and T. van Walsum, *Fluid flow visualization*, Focus on Scientific Viusalization (1993), 1–40, H. Hagen, H. Müller and G.M. Nielson (editors), Springer-Verlag Berlin.

[Rey64] J. W. Reyn, *Classification and description of the singular points of a system of three linear differential equations*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP) **15** (1964), 540–557.

[SH95] D. Stalling and H. Hege, *Fast and resolution independet line integral convolution*, Proceedings Siggraph '95 (1995), 249–256, Los Angeles.

[SHK+97] G. Scheuermann, H. Hagen, H. Krüger, M. Menzel, and A. Rockwood, *Visualization of higher order singularities in vector fields*, Proc. of IEEE Visualization '97 (1997), 67–74, IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA,.

[SM00] H. Schumann and W. Müller, *Visualisierung - grundlagen und allgemeine methoden*, Springer-Verlag, 2000.

[The95] Holger Theisel, *Vector field curvature and applications*, Phd thesis, University of Rostock, November 1995.

[TK98] Holger Theisel and Matthias Kreuseler, *An enhanced spring model for information visualization*, Proceedings Eurographics 98 **17** (1998), no. 3, 335–344, Computer Graphics Forum.

[WG92] J. Wilhelms and A.v. Gelder, *Octrees for faster isosurface generation*, ACM Transactions on Graphics **11** (1992), no. 3, 201–227.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Tino Weinkauf: Krümmungsvisualisierung für 3D-Vektorfelder
Diplomarbeit, eingereicht am 30.06.2000

Thesen

1. Tangentenkurven sind ein besonders wichtiges Mittel zur Beschreibung, Analyse und Visualisierung von Vektorfeldern.

2. Tangentenkurven sind i.a. nicht explizit beschreibbar. Dennoch lassen sich deren Krümmung und Torsion für jeden Punkt eines 3D-Vektorfeldes bestimmen (mit Ausnahme von kritischen Punkten). Krümmungsfeld und Torsionsfeld eines Vektorfeldes werden als skalare Felder definiert, die in jedem nicht-kritischen Punkt die Krümmung bzw. Torsion der Tangentenkurve durch diesen Punkt angeben. Das Torsionsfeld ist an den Punkten nicht definiert, an denen der erste und zweite Ableitungsvektor der Tangentenkurve linear abhängig sind.

3. Eine Normalenfläche eines Vektorfeldes wird durch all die Punkte definiert, an denen der normierte Vektor des Vektorfeldes mit dem Normalenvektor der Fläche übereinstimmt. An kritischen Punkten sind Normalenflächen nicht definiert. Analog zu Tangentenkurven schneiden oder berühren sich Normalenflächen nicht.

4. Normalenflächen sind i.a. nicht explizit beschreibbar. Jedoch lassen sich deren Gaußsche und mittlere Krümmung für jeden nicht-kritischen Punkt eines 3D-Vektorfeldes bestimmen. Gaußsches und mittleres Krümmungsfeld eines Vektorfeldes werden als skalare Felder definiert, die in jedem nicht-kritischen Punkt die Gaußsche bzw. mittlere Krümmung der Normalenfläche durch diesen Punkt angeben.

5. Das Krümmungsfeld eines linearen Vektorfeldes der topologischen Klasse 4 ist konstant Null. Für alle anderen Topologien linearer Vektorfelder divergiert das Krümmungsfeld umgekehrt proportional zum Abstand vom kritischen Punkt; betrachtet auf einem Strahl beginnend im kritischen Punkt.

6. Das Torsionsfeld eines linearen Vektorfeldes der topologischen Klasse 4 ist an allen Punkten nicht definiert. Weiterhin ist dieses Feld bei linearen Vektorfeldern der Klassen 2 und 5 konstant Null. Für alle anderen Topologien linearer Vektorfelder divergiert das Torsionsfeld umgekehrt proportional zum Abstand vom kritischen Punkt; betrachtet auf einem Strahl beginnend im kritischen Punkt.

7. Das Gaußsche Krümmungsfeld eines linearen Vektorfeldes mit der Topologie eines Centers ist an allen Punkten konstant Null. Für alle anderen Topologien linearer Vektorfelder divergiert das Gaußsche Krümmungsfeld umgekehrt quadratisch proportional zum Abstand vom kritischen Punkt; betrachtet auf einem Strahl beginnend im kritischen Punkt.

8. Das mittlere Krümmungsfeld eines linearen Vektorfeldes weist für alle Topologien Werte ungleich Null auf. Es divergiert umgekehrt proportional

zum Abstand vom kritischen Punkt; betrachtet auf einem Strahl beginnend im kritischen Punkt.

9. Für lineare Vektorfelder divergiert aus der Menge, die durch Krümmungs-, Torsions-, Gaußsches und mittleres Krümmungsfeld gebildet wird, zumindest eines der beteiligten Skalarfelder in der Nähe eines kritischen Punktes. Diese Aussage gilt auch für bestimmte Teilmengen dieser Menge.

10. Kanonische Vektorfelder stellen eine Untermenge der linearen Vektorfelder dar, die durch die Kanonisierung der Jacobi Matrix des linearen Vektorfeldes definiert werden.

11. Die Richtungen der Vektoren eines kanonischen Vektorfeldes sind durch das mittlere Krümmungsfeld eindeutig bestimmt. Somit beschreibt das mittlere Krümmungsfeld die Topologien kanonischer Vektorfelder eindeutig.

12. Ein Isoraum eines Skalarfeldes wird durch die Menge aller Punkte definiert, an denen die Skalarwerte einem bestimmten Wertebereich zuzuordnen sind. Dieser Isoraum wird durch zwei Isoflächen begrenzt. Die Projektion von Isoräumen ist unter Verwendung einer Raumunterteilung eine algorithmisch schnelle Visualisierungstechnik für Skalarfelder.

13. Zur Visualisierung des Krümmungs-, Torsions-, Gaußschen und mittleren Krümmungsfeldes lassen sich u.a. die Techniken Marching Cubes und Isoraumprojektion verwenden. Dabei wird die Lage der kritischen Punkte im Vektorfeld unter Umgehung einer vorherigen numerischen Suchmethode angezeigt. Die Topologie des zugehörigen Vektorfeldes beeinflusst die bei der Visualisierung entstehenden Geometrien maßgeblich.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass die eingereichte Diplomarbeit von mir selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst wurde. Andere als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen habe ich nicht benutzt. Die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht.

Tino Weinkauf
28. Juni 2000

Anhang A

Weitere Formeln zur trilinearen Interpolation

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung von (2.43) lauten (man beachte den konstanten Faktor):

$$
\begin{aligned}
F_{G_0}^{G_1}(x,y,z)\frac{d}{dx} = \frac{1}{x_{step}} \cdot \Bigg(& \\
& - \frac{y_1 - y}{y_{step}} \cdot \frac{z_1 - z}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} - \frac{y_1 - y}{y_{step}} \cdot \frac{z - z_0}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& - \frac{y - y_0}{y_{step}} \cdot \frac{z_1 - z}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_1 \\ z_0 \end{pmatrix} - \frac{y - y_0}{y_{step}} \cdot \frac{z - z_0}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& + \frac{y_1 - y}{y_{step}} \cdot \frac{z_1 - z}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{y_1 - y}{y_{step}} \cdot \frac{z - z_0}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& + \frac{y - y_0}{y_{step}} \cdot \frac{z_1 - z}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{y - y_0}{y_{step}} \cdot \frac{z - z_0}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Bigg)
\end{aligned} \tag{A.1}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{G_0}^{G_1}(x,y,z)\frac{d}{dy} = \frac{1}{y_{step}} \cdot \Bigg(& \\
& - \frac{x_1 - x}{x_{step}} \cdot \frac{z_1 - z}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} - \frac{x_1 - x}{x_{step}} \cdot \frac{z - z_0}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& + \frac{x_1 - x}{x_{step}} \cdot \frac{z_1 - z}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_1 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{x_1 - x}{x_{step}} \cdot \frac{z - z_0}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& - \frac{x - x_0}{x_{step}} \cdot \frac{z_1 - z}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} - \frac{x - x_0}{x_{step}} \cdot \frac{z - z_0}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& + \frac{x - x_0}{x_{step}} \cdot \frac{z_1 - z}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{x - x_0}{x_{step}} \cdot \frac{z - z_0}{z_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.2}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{G_0}^{G_1}(x,y,z)\frac{d}{dz} = \frac{1}{z_{step}} \cdot \Bigg(& \\
& -\frac{x_1-x}{x_{step}} \cdot \frac{y_1-y}{y_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{x_1-x}{x_{step}} \cdot \frac{y_1-y}{y_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& -\frac{x_1-x}{x_{step}} \cdot \frac{y-y_0}{y_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_0 \\ y_1 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{x_1-x}{x_{step}} \cdot \frac{y-y_0}{y_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& -\frac{x-x_0}{x_{step}} \cdot \frac{y_1-y}{y_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{x-x_0}{x_{step}} \cdot \frac{y_1-y}{y_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& -\frac{x-x_0}{x_{step}} \cdot \frac{y-y_0}{y_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{x-x_0}{x_{step}} \cdot \frac{y-y_0}{y_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.3}
$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von (2.43) lauten (man beachte die konstanten Faktoren):

$$
F_{G_0}^{G_1}(x,y,z)\frac{d}{d^2x} \;=\; F_{G_0}^{G_1}(x,y,z)\frac{d}{d^2y} \;=\; F_{G_0}^{G_1}(x,y,z)\frac{d}{d^2z} \;=\; \mathbf{0} \tag{A.4}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{G_0}^{G_1}(x,y,z)\frac{d}{dx\,dy} = \frac{1}{x_{step}} \cdot \frac{1}{y_{step}} \cdot \Bigg(& \\
& \frac{z_1-z}{z_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{z-z_0}{z_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& -\frac{z_1-z}{z_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_0 \\ y_1 \\ z_0 \end{pmatrix} - \frac{z-z_0}{z_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& -\frac{z_1-z}{z_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} - \frac{z-z_0}{z_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& +\frac{z_1-z}{z_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{z-z_0}{z_{step}} \cdot V_G\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\Bigg)
\end{aligned} \tag{A.5}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{G_0}^{G_1}(x,y,z)\frac{d}{dx\,dz} = \frac{1}{x_{step}} \cdot \frac{1}{z_{step}} \cdot \Bigg(& \\
& \frac{y_1 - y}{y_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} - \frac{y_1 - y}{y_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& + \frac{y - y_0}{y_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_1 \\ z_0 \end{pmatrix} - \frac{y - y_0}{y_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& - \frac{y_1 - y}{y_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{y_1 - y}{y_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& - \frac{y - y_0}{y_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{y - y_0}{y_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Bigg)
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{G_0}^{G_1}(x,y,z)\frac{d}{dy\,dz} = \frac{1}{y_{step}} \cdot \frac{1}{z_{step}} \cdot \Bigg(& \\
& \frac{x_1 - x}{x_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} - \frac{x_1 - x}{x_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& - \frac{x_1 - x}{x_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_1 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{x_1 - x}{x_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& + \frac{x - x_0}{x_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} - \frac{x - x_0}{x_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& - \frac{x - x_0}{x_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{x - x_0}{x_{step}} \cdot V_G \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

Aufgrund von (A.4) vereinfacht sich die Formel (2.26) über den 3. Ableitungsvektor einer Tangentenkurve für stückweise trilinear interpolierte Vektorfelder wie folgt:[1]

$$
\begin{aligned}
\dddot{L} = {} & f^u \cdot (f_x^u \cdot F_x + f_x^v \cdot F_y + f^v \cdot F_{xy} + f_x^w \cdot F_z + f^w \cdot F_{xz}) \\
& + f^v \cdot (f_y^u \cdot F_x + f^u \cdot F_{xy} + f_y^v \cdot F_y + f_y^w \cdot F_z + f^w \cdot F_{yz}) \\
& + f^w \cdot (f_z^u \cdot F_x + f^u \cdot F_{xz} + f_z^v \cdot F_y + f^v \cdot F_{yz} + f_z^w \cdot F_z)
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

[1] Der Übersichtlichkeit halber sei $F_{G_0}^{G_1}(x,y,z) = F = (f^u, f^v, f^w)^T$.

Anhang B

Fallstudien zum Beweis von Satz 8

In diesem Abschnitt werden die einzelnen Klassen der im Beweis von Satz 8 aufgestellten 4 Fälle daraufhin untersucht, ob sie mittels der mittleren Krümmung voneinander zu unterscheiden sind. Es wurde bereits gezeigt, dass die mittlere Krümmung alle zu einem Fall gehörigen kanonischen Vektorfelder eindeutig beschreibt. Somit bleibt noch zu zeigen, dass die Vektorfelder der verschiedenen Fälle eindeutig (also unterscheidbar) mittels der mittleren Krümmung beschreibbar sind. Hierzu werden die Klassen eines Falles mit denen eines anderen Falles einzeln verglichen. Dabei wird jeweils zunächst ein Ungleichungssystem aufgestellt, welches die Frage klärt, an welchen abgetasteten Punkten die Formeln für die mittlere Krümmung identisch sind. Daraufhin wird ein Gleichungssystem mit den nicht-identischen Formeln aufgestellt, welches zeigen soll, ob für bestimmte Vektorfelder diese Formeln gleiche Werte ergeben. Wenn diese Gleichungssysteme bei allen zu untersuchenden Klassenpaaren keine Lösungen ergeben, ist gezeigt, dass die mittlere Krümmung kanonische Vektorfelder eindeutig beschreibt.

```
#Aufstellung der Formeln.
#K124 bedeutet mittlere Krümmung der Klassen 1, 2 und 4.
#Analog für die anderen Abkürzungen.
K124_M1_100 := -1/2*(wz+vy)*ux^2/(ux^2)^(3/2);
K35_M1_100 := -1/2*(ux+wz)*ux^2/(ux^2)^(3/2);
K6_M1_100 := -ux^3/(ux^2)^(3/2);
K7_M1_100 := -1/2*(ux+wz)/(ux^2+vx^2)^(1/2);
K124_M1_010 := -1/2*(ux+wz)*vy^2/(vy^2)^(3/2);
K35_M1_010 := -1/2*(wz+ux^3+ux^2*wz)/(1+ux^2)^(3/2);
K6_M1_010 := -1/2*ux*(1+2*ux^2)/(1+ux^2)^(3/2);
K7_M1_010 := -1/2*(ux+wz)/(ux^2+vx^2)^(1/2);
K124_M1_001 := -1/2*(vy+ux)*wz^2/(wz^2)^(3/2);
K35_M1_001 := -ux*wz^2/(wz^2)^(3/2);
K6_M1_001 := -1/2*ux*(1+2*ux^2)/(1+ux^2)^(3/2);
K7_M1_001 := -ux*wz^2/(wz^2)^(3/2);
```

$$K124\_M1\_100 := -\frac{1}{2}\,\frac{(wz+vy)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}}$$

$$K35\_M1\_100 := -\frac{1}{2}\frac{(ux + wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}}$$

$$K6\_M1\_100 := -\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}}$$

$$K7\_M1\_100 := -\frac{1}{2}\frac{ux + wz}{\sqrt{ux^2 + vx^2}}$$

$$K124\_M1\_010 := -\frac{1}{2}\frac{(ux + wz)\,vy^2}{(vy^2)^{3/2}}$$

$$K35\_M1\_010 := -\frac{1}{2}\frac{wz + ux^3 + ux^2\,wz}{(1 + ux^2)^{3/2}}$$

$$K6\_M1\_010 := -\frac{1}{2}\frac{ux\,(1 + 2\,ux^2)}{(1 + ux^2)^{3/2}}$$

$$K7\_M1\_010 := -\frac{1}{2}\frac{ux + wz}{\sqrt{ux^2 + vx^2}}$$

$$K124\_M1\_001 := -\frac{1}{2}\frac{(vy + ux)\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}}$$

$$K35\_M1\_001 := -\frac{ux\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}}$$

$$K6\_M1\_001 := -\frac{1}{2}\frac{ux\,(1 + 2\,ux^2)}{(1 + ux^2)^{3/2}}$$

$$K7\_M1\_001 := -\frac{ux\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}}$$

Die müssen unterschiedlich sein.

Hier ein paar Mengen, die die Arbeit mit den Formeln erleichtern sollen. Anwendung mittels subs();

```
VYUX := {vy=ux};
VYWZUX := {vy=ux, wz=ux};
WZUX := {wz=ux};
TOV2 := {ux=u2x,vy=u2y,wz=w2z,vx=v2x};
FORV2_1 := {u2x,v2y,w2z};
FORV2_2 := {u2x,w2z};
FORV2_3 := {u2x};
```

$$VYUX := \{vy = ux\}$$

$$VYWZUX := \{vy = ux,\ wz = ux\}$$

$$WZUX := \{wz = ux\}$$

$$TOV2 := \{vx = v2x,\ ux = u2x,\ vy = u2y,\ wz = w2z\}$$

$$FORV2\_1 := \{u2x,\ w2z,\ v2y\}$$

$$FORV2\_2 := \{u2x,\ w2z\}$$

$$FORV2\_3 := \{u2x\}$$

Unterschiede zwischen Fall 1 und 2

```
#Klasse 1 mit Klasse 3
UGS := {K124_M1_100 <> K35_M1_100};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {K124_M1_010 <> K35_M1_010};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {K124_M1_001 <> K35_M1_001};
sol := {solve(UGS)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(wz + vy)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{(ux + wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux,\ wz = wz,\ vy = vy\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux + wz)\,vy^2}{(vy^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{wz + ux^3 + ux^2\,wz}{(1 + ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux,\ wz = wz,\ vy = vy\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(vy + ux)\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux,\ wz = wz,\ vy = vy\}\}$$

```
UGS := {K124_M1_100 = subs(TOV2,
K35_M1_100), K124_M1_010 = subs(TOV2, K35_M1_010), K124_M1_001 =
subs(TOV2, K35_M1_001)};
sol := {solve(UGS, FORV2_2)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(wz + vy)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{(u2x + w2z)\,u2x^2}{(u2x^2)^{3/2}},$$
$$-\frac{1}{2}\,\frac{(ux + wz)\,vy^2}{(vy^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{w2z + u2x^3 + u2x^2\,w2z}{(1 + u2x^2)^{3/2}},\ -\frac{1}{2}\,\frac{(vy + ux)\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}} = -\frac{u2x\,w2z^2}{(w2z^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

```
# Klasse 2 mit Klasse 3
UGS := {subs(VYUX, K124_M1_100) <> K35_M1_100};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYUX, K124_M1_010) <> K35_M1_010};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYUX, K124_M1_001) <> K35_M1_001};
sol := {solve(UGS)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux+wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{(ux+wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux+wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{wz+ux^3+ux^2\,wz}{(1+ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\, ux = ux\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{ux\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

```
UGS := {subs(VYUX, K124_M1_010) = subs(TOV2,
K35_M1_010)};
sol := {solve(UGS, FORV2_2)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux+wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{w2z+u2x^3+u2x^2\,w2z}{(1+u2x^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

```
# Klasse 4 mit Klasse 3
UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_100) <> K35_M1_100};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_010) <> K35_M1_010};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_001) <> K35_M1_001};
sol := {solve(UGS)};
```

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{(ux+wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\, ux = ux\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{wz+ux^3+ux^2\,wz}{(1+ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\ ux = ux\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux\ wz^2}{(wz^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\ ux = ux\}\}$$

```
UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_100) =
subs(TOV2, K35_M1_100), subs(VYWZUX, K124_M1_010) = subs(TOV2,
K35_M1_010), subs(VYWZUX, K124_M1_001) = subs(TOV2, K35_M1_001)};
sol := {solve(UGS, FORV2_2)};
```

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{u2x\ w2z^2}{(w2z^2)^{3/2}},\ -\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{(u2x + w2z)\,u2x^2}{(u2x^2)^{3/2}},$$
$$-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{w2z + u2x^3 + u2x^2\ w2z}{(1 + u2x^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

```
# Klasse 1 mit Klasse 5
UGS := {K124_M1_100 <> subs(WZUX, K35_M1_100)};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {K124_M1_010 <> subs(WZUX, K35_M1_010)};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {K124_M1_001 <> subs(WZUX, K35_M1_001)};
sol := {solve(UGS)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(wz + vy)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\ ux = ux,\ vy = vy\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux + wz)\,vy^2}{(vy^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux + 2\,ux^3}{(1 + ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\ ux = ux,\ vy = vy\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(vy + ux)\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\ ux = ux,\ vy = vy\}\}$$

```
UGS := {K124_M1_100 = subs(TOV2, subs(WZUX,
K35_M1_100)), K124_M1_010 = subs(TOV2, subs(WZUX, K35_M1_010)),
K124_M1_001 = subs(TOV2, subs(WZUX, K35_M1_001))};
sol := {solve(UGS, FORV2_3)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(wz + vy)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{u2x^3}{(u2x^2)^{3/2}},\ -\frac{1}{2}\,\frac{(ux + wz)\,vy^2}{(vy^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u2x + 2\,u2x^3}{(1 + u2x^2)^{3/2}},\ -\frac{1}{2}\,\frac{(vy + ux)\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}} = -\frac{u2x^3}{(u2x^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

```
# Klasse 2 mit Klasse 5
UGS := {subs(VYUX, K124_M1_100) <> subs(WZUX, K35_M1_100)};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYUX, K124_M1_010) <> subs(WZUX, K35_M1_010)};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYUX, K124_M1_001) <> subs(WZUX, K35_M1_001)};
sol := {solve(UGS)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux + wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux,\ wz = wz\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux + wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux + 2\,ux^3}{(1 + ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux,\ wz = wz\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{ux\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux,\ wz = wz\}\}$$

```
UGS := {subs(VYUX, K124_M1_100) = subs(TOV2,
subs(WZUX, K35_M1_100)), subs(VYUX, K124_M1_010) = subs(TOV2,
subs(WZUX, K35_M1_010)), subs(VYUX, K124_M1_001) = subs(TOV2,
subs(WZUX, K35_M1_001))};
sol := {solve(UGS, FORV2_3)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux + wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u2x + 2\,u2x^3}{(1 + u2x^2)^{3/2}},\ -\frac{1}{2}\,\frac{(ux + wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{u2x^3}{(u2x^2)^{3/2}},\ -\frac{ux\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}} = -\frac{u2x^3}{(u2x^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

```
# Klasse 4 mit Klasse 5
UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_100) <> subs(WZUX, K35_M1_100)};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_010) <> subs(WZUX, K35_M1_010)};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_001) <> subs(WZUX, K35_M1_001)};
sol := {solve(UGS)};
```

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux + 2\,ux^3}{(1 + ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

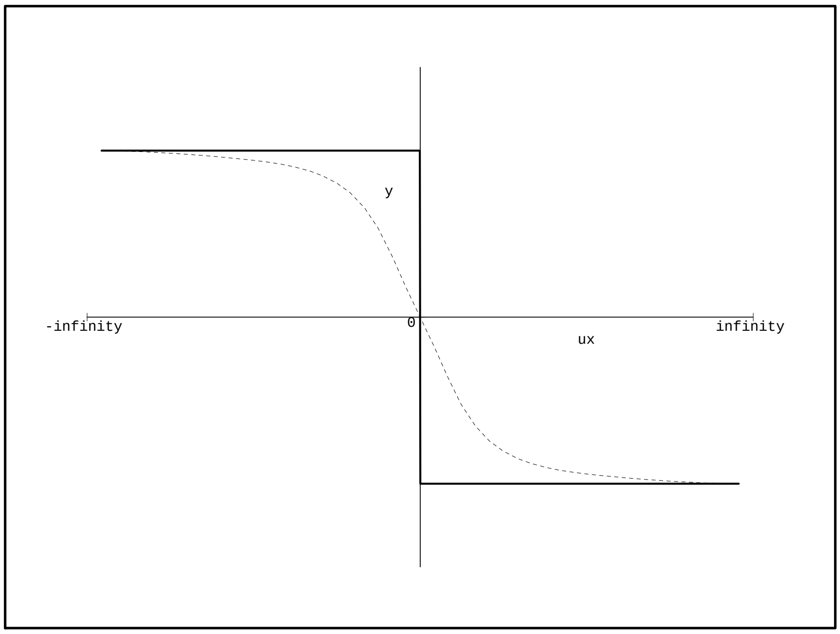
```
UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_010) =
subs(TOV2, subs(WZUX, K35_M1_010))};
sol := {solve(UGS, FORV2_3)};
```

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u2x + 2\,u2x^3}{(1 + u2x^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{u2x = 2\ \mathrm{RootOf}((-4 + 4\,\mathrm{csgn}(ux)^2)\,\_Z^6 - 8\,\_Z^4\,\mathrm{csgn}(ux)^2 + 5\,\mathrm{csgn}(ux)^2\,\_Z^2 - \mathrm{csgn}(ux)^2)^3 \Big/ (\mathrm{csgn}(ux)\,(-1 + 2\,\mathrm{RootOf}((-4 + 4\,\mathrm{csgn}(ux)^2)\,\_Z^6 - 8\,\_Z^4\,\mathrm{csgn}(ux)^2 + 5\,\mathrm{csgn}(ux)^2\,\_Z^2 - \mathrm{csgn}(ux)^2)^2))\}\}$$

Es ergibt sich eine Lösung für u2x. Eine genauere Untersuchung ist angesagt.

```
plot([subs(VYWZUX, K124_M1_010),subs(WZUX,
K35_M1_010)], ux=-infinity..infinity, y=-1.5..1.5, color=[black],
style=[line,line], linestyle=[0,2], thickness=[3,1],axes=normal);
```



Wie man am Plot sieht, werden die beiden Funktionen nur im unendlichen gleich.

Fall 1 und 2 sind immer unterschiedlich in allen Klassen; Mean Curvature beschreibt also diese Klassen eindeutig, wenn VF in kanonischer Form

.

Unterschiede zwischen Fall 1 und 3

```
#Klasse 1 mit Klasse 6
UGS := {K124_M1_100 <> K6_M1_100};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {K124_M1_010 <> K6_M1_010};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {K124_M1_001 <> K6_M1_001};
sol := {solve(UGS)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(wz+vy)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux,\ wz = wz,\ vy = vy\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux+wz)\,vy^2}{(vy^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux\,(1+2\,ux^2)}{(1+ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux,\ wz = wz,\ vy = vy\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(vy+ux)\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux\,(1+2\,ux^2)}{(1+ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux,\ wz = wz,\ vy = vy\}\}$$

```
UGS := {K124_M1_100 = subs(TOV2, K6_M1_100),
K124_M1_010 = subs(TOV2, K6_M1_010), K124_M1_001 = subs(TOV2,
K6_M1_001)};
sol := {solve(UGS, FORV2_3)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(wz+vy)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{u2x^3}{(u2x^2)^{3/2}},\ -\frac{1}{2}\,\frac{(ux+wz)\,vy^2}{(vy^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u2x\,(1+2\,u2x^2)}{(1+u2x^2)^{3/2}},$$
$$-\frac{1}{2}\,\frac{(vy+ux)\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u2x\,(1+2\,u2x^2)}{(1+u2x^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

```
# Klasse 2 mit Klasse 6
UGS := {subs(VYUX, K124_M1_100) <> K6_M1_100};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYUX, K124_M1_010) <> K6_M1_010};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYUX, K124_M1_001) <> K6_M1_001};
sol := {solve(UGS)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux+wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux,\ wz = wz\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux+wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux\,(1+2\,ux^2)}{(1+ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux,\ wz = wz\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{ux\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux\,(1+2\,ux^2)}{(1+ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux,\ wz = wz\}\}$$

```
UGS := {subs(VYUX, K124_M1_100) = subs(TOV2,
K6_M1_100), subs(VYUX, K124_M1_010) = subs(TOV2, K6_M1_010),
subs(VYUX, K124_M1_001) = subs(TOV2, K6_M1_001)};
sol := {solve(UGS, FORV2_3)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux+wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u2x\,(1+2\,u2x^2)}{(1+u2x^2)^{3/2}},\ -\frac{ux\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u2x\,(1+2\,u2x^2)}{(1+u2x^2)^{3/2}},$$
$$-\frac{1}{2}\,\frac{(ux+wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{u2x^3}{(u2x^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

```
# Klasse 4 mit Klasse 6
UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_100) <> K6_M1_100};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_010) <> K6_M1_010};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_001) <> K6_M1_001};
sol := {solve(UGS)};
```

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux\,(1+2\,ux^2)}{(1+ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux\,(1+2\,ux^2)}{(1+ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux\}\}$$

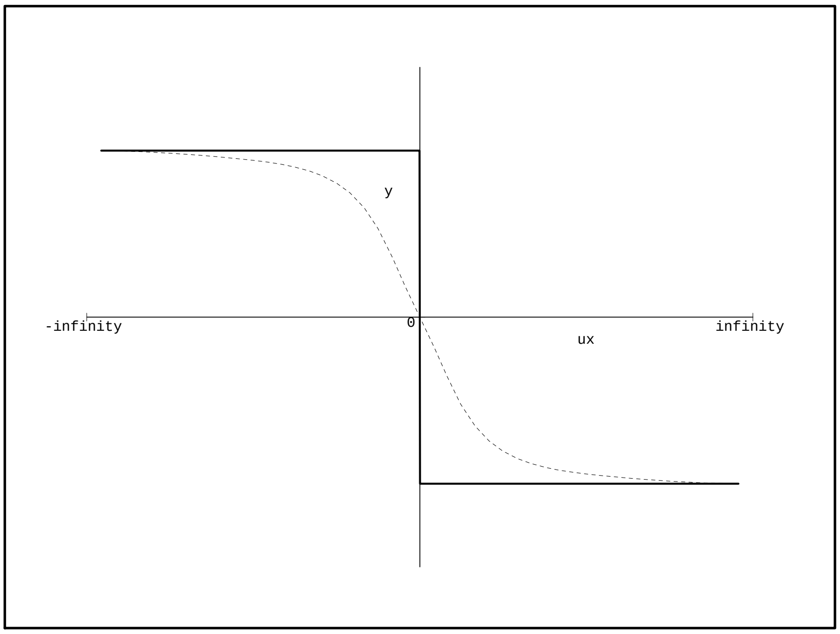
```
UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_010) =
subs(TOV2, K6_M1_010), subs(VYWZUX, K124_M1_001) = subs(TOV2,
K6_M1_001)};
sol := {solve(UGS, FORV2_3)};
```

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u2x\,(1+2\,u2x^2)}{(1+u2x^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{u2x = 2\,\mathrm{RootOf}((-4+4\,\mathrm{csgn}(ux)^2)\,\_Z^6 - 8\,\_Z^4\,\mathrm{csgn}(ux)^2 + 5\,\mathrm{csgn}(ux)^2\,\_Z^2 - \mathrm{csgn}(ux)^2)^3 \Big/ (\mathrm{csgn}(ux)\,(-1 + 2\,\mathrm{RootOf}((-4+4\,\mathrm{csgn}(ux)^2)\,\_Z^6 - 8\,\_Z^4\,\mathrm{csgn}(ux)^2 + 5\,\mathrm{csgn}(ux)^2\,\_Z^2 - \mathrm{csgn}(ux)^2)^2))\}\}$$

Es ergibt sich eine Lösung für u2x. Eine genauere Untersuchung ist angesagt.

```
plot([subs(VYWZUX, K124_M1_010),K6_M1_010],
ux=-infinity..infinity, y=-1.5..1.5, color=[black], style=[line,line],
linestyle=[0,2], thickness=[3,1],axes=normal);
```



Wie man am Plot sieht, werden die beiden Funktionen nur im unendlichen gleich. Auch Fall 1 und 3 werden eindeutig durch die mittlere Krümmung unterschieden. Unterschiede zwischen Fall 1 und 4

```
#Klasse 1 mit Klasse 7
UGS := {K124_M1_100 <> K7_M1_100};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {K124_M1_010 <> K7_M1_010};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {K124_M1_001 <> K7_M1_001};
sol := {solve(UGS)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(wz+vy)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux+wz}{\sqrt{ux^2+vx^2}}\}$$

$$sol := \{\{vy = vy,\ vx = vx,\ ux = ux,\ wz = wz\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux+wz)\,vy^2}{(vy^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux+wz}{\sqrt{ux^2+vx^2}}\}$$

$$sol := \{\{vy = vy,\ vx = vx,\ ux = ux,\ wz = wz\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(vy+ux)\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{vy = vy,\ ux = ux,\ wz = wz\}\}$$

```
UGS := {K124_M1_100 = subs(TOV2, K7_M1_100),
K124_M1_010 = subs(TOV2, K7_M1_010), K124_M1_001 = subs(TOV2,
K7_M1_001)};
sol := {solve(UGS, {u2x,w2z,v2x})};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux + wz)\,vy^2}{(vy^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u2x + w2z}{\sqrt{u2x^2 + v2x^2}},\ -\frac{1}{2}\,\frac{(vy + ux)\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}} = -\frac{u2x\ w2z^2}{(w2z^2)^{3/2}},\\ -\frac{1}{2}\,\frac{(wz + vy)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u2x + w2z}{\sqrt{u2x^2 + v2x^2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

```
# Klasse 2 mit Klasse 7
UGS := {subs(VYUX, K124_M1_100) <> K7_M1_100};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYUX, K124_M1_010) <> K7_M1_010};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYUX, K124_M1_001) <> K7_M1_001};
sol := {solve(UGS)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux + wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux + wz}{\sqrt{ux^2 + vx^2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\ vx = vx,\ ux = ux\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux + wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux + wz}{\sqrt{ux^2 + vx^2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\ vx = vx,\ ux = ux\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{ux\ wz^2}{(wz^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux\ wz^2}{(wz^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

```
UGS := {subs(VYUX, K124_M1_100) = subs(TOV2,
K7_M1_100), subs(VYUX, K124_M1_010) = subs(TOV2, K7_M1_010)};
sol := {solve(UGS, {u2x,w2z,v2x})};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux + wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u2x + w2z}{\sqrt{u2x^2 + v2x^2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

```
# Klasse 4 mit Klasse 7
UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_100) <> K7_M1_100};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_010) <> K7_M1_010};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_001) <> K7_M1_001};
sol := {solve(UGS)};
```

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux + wz}{\sqrt{ux^2 + vx^2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\, vx = vx,\, ux = ux\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux + wz}{\sqrt{ux^2 + vx^2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\, vx = vx,\, ux = ux\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux\; wz^2}{(wz^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\, ux = ux\}\}$$

```
UGS := {subs(VYWZUX, K124_M1_100) =
subs(TOV2, K7_M1_100), subs(VYWZUX, K124_M1_010) = subs(TOV2,
K7_M1_010), subs(VYWZUX, K124_M1_001) = K7_M1_001};
sol := {solve(UGS, {u2x,w2z,v2x})};
```

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u2x + w2z}{\sqrt{u2x^2 + v2x^2}},\, -\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{ux\; wz^2}{(wz^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

Fall 1 und 4 sind unterscheidbar.

Unterschiede zwischen Fall 2 und 3

```
#Klasse 3 mit Klasse 6
UGS := {K35_M1_100 <> K6_M1_100};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {K35_M1_010 <> K6_M1_010};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {K35_M1_001 <> K6_M1_001};
sol := {solve(UGS)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux + wz)\, ux^2}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\, ux = ux\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{wz + ux^3 + ux^2\,wz}{(1+ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux\,(1+2\,ux^2)}{(1+ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\; ux = ux\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{ux\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux\,(1+2\,ux^2)}{(1+ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\; ux = ux\}\}$$

```
UGS := {K35_M1_100 = subs(TOV2, K6_M1_100),
K35_M1_010 = subs(TOV2, K6_M1_010), K35_M1_001 = subs(TOV2,
K6_M1_001)};
sol := {solve(UGS, FORV2_3)};
```

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{(ux+wz)\,ux^2}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{u2x^3}{(u2x^2)^{3/2}},\; -\frac{1}{2}\,\frac{wz + ux^3 + ux^2\,wz}{(1+ux^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u2x\,(1+2\,u2x^2)}{(1+u2x^2)^{3/2}},$$
$$-\frac{ux\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u2x\,(1+2\,u2x^2)}{(1+u2x^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

```
# Klasse 5 mit Klasse 6
UGS := {subs(WZUX, K35_M1_100) <> K6_M1_100};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(WZUX, K35_M1_010) <> K6_M1_010};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {subs(WZUX, K35_M1_001) <> K6_M1_001};
sol := {solve(UGS)};
```

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\,\frac{ux + 2\,ux^3}{(1+ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux\,(1+2\,ux^2)}{(1+ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\,\frac{ux\,(1+2\,ux^2)}{(1+ux^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{ux = ux\}\}$$

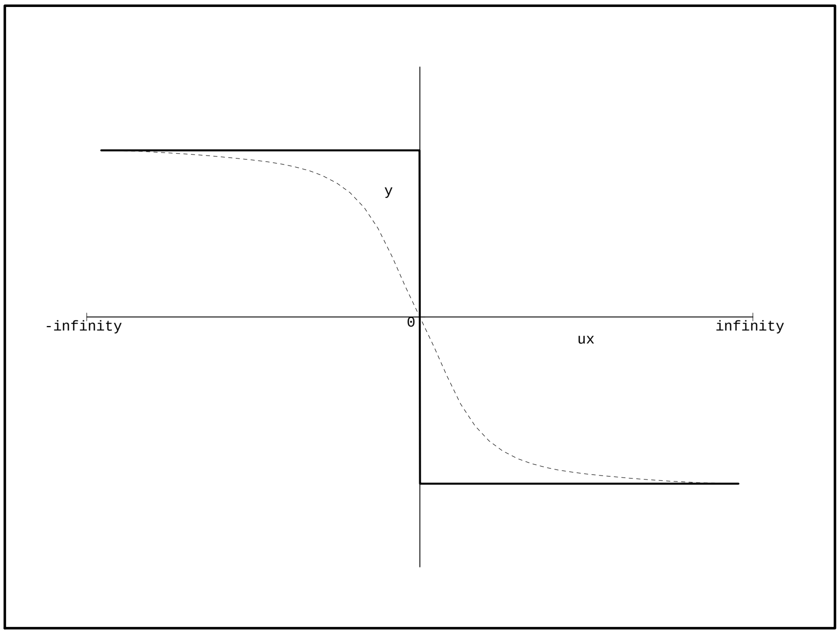
```
UGS := {subs(WZUX, K35_M1_001) = subs(TOV2,
K6_M1_001)};
sol := {solve(UGS, FORV2_3)};
```

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u2x\,(1+2\,u2x^2)}{(1+u2x^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{u2x = 2\,\mathrm{RootOf}((-4+4\,\mathrm{csgn}(ux)^2)\,\_Z^6 - 8\,\_Z^4\,\mathrm{csgn}(ux)^2 + 5\,\mathrm{csgn}(ux)^2\,\_Z^2 - \mathrm{csgn}(ux)^2)^3 \Big/ (\mathrm{csgn}(ux)\,(-1+2\,\mathrm{RootOf}((-4+4\,\mathrm{csgn}(ux)^2)\,\_Z^6 - 8\,\_Z^4\,\mathrm{csgn}(ux)^2 + 5\,\mathrm{csgn}(ux)^2\,\_Z^2 - \mathrm{csgn}(ux)^2)^2))\}\}$$

Es ergibt sich eine Lösung für u2x. Eine genauere Untersuchung ist angesagt.

```
plot([subs(WZUX, K35_M1_001), K6_M1_001],
ux=-infinity..infinity, y=-1.5..1.5, color=[black], style=[line,line],
linestyle=[0,2], thickness=[3,1],axes=normal);
```



Wie man am Plot sieht, werden die beiden Funktionen nur im unendlichen gleich.

Fall 2 und 3 sind unterscheidbar.

Unterschiede zwischen Fall 3 und 4

```
#Klasse 6 mit Klasse 7
UGS := {K6_M1_100 <> K7_M1_100};
sol := {solve(UGS)};

UGS := {K6_M1_010 <> K7_M1_010};
```

```
sol := {solve(UGS)};

UGS := {K6_M1_001 <> K7_M1_001};
sol := {solve(UGS)};
```

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\frac{ux + wz}{\sqrt{ux^2 + vx^2}}\}$$

$$sol := \{\{vx = vx,\ wz = wz,\ ux = ux\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\frac{ux\,(1 + 2\,ux^2)}{(1 + ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{1}{2}\frac{ux + wz}{\sqrt{ux^2 + vx^2}}\}$$

$$sol := \{\{vx = vx,\ wz = wz,\ ux = ux\}\}$$

$$UGS := \{-\frac{1}{2}\frac{ux\,(1 + 2\,ux^2)}{(1 + ux^2)^{3/2}} \neq -\frac{ux\,wz^2}{(wz^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\{wz = wz,\ ux = ux\}\}$$

```
UGS := {K6_M1_100 = subs(TOV2, K7_M1_100),
K6_M1_010 = subs(TOV2, K7_M1_010), K6_M1_001 = subs(TOV2,
K7_M1_001)};
sol := {solve(UGS, FORV2_2)};
```

$$UGS := \{-\frac{ux^3}{(ux^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\frac{u2x + w2z}{\sqrt{u2x^2 + v2x^2}},\ -\frac{1}{2}\frac{ux\,(1 + 2\,ux^2)}{(1 + ux^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\frac{u2x + w2z}{\sqrt{u2x^2 + v2x^2}},$$
$$-\frac{1}{2}\frac{ux\,(1 + 2\,ux^2)}{(1 + ux^2)^{3/2}} = -\frac{u2x\,w2z^2}{(w2z^2)^{3/2}}\}$$

$$sol := \{\}$$

Fall 3 und 4 sind mittels Mean unterscheidbar.

Ergebnis der Untersuchungen: Alle Klassen verschiedener Fälle lassen sich voneinander unterscheiden mittels der mittleren Krümmung. Da sich zudem auch die Vektorfelder innerhalb der einzelnen Fälle unterscheiden lassen (nicht hier gezeigt, sondern in anderen Quelltexten), können alle kanonischen Vektorfelder sich mittels der mittleren Krümmung unterscheiden lassen.