Numeriska metoder grundkurs I
Övning 4 för Bio3 och BM

Övningsgrupp 2

Johannes Hjorth
hjorth@nada.kth.se
Rum 4538 på plan 5 i D-huset
08 - 790 69 02

Kurshemsida:
`http://www.nada.kth.se/kurser/kth/2D1210/04-05/BIO/`

Material utdelat på övningarna:

`http://www.nada.kth.se/~hjorth/teaching/numbio04`

Kort teori om minstakvadratmetoden

När vi har fler ekvationer än obekanta är vårt ekvationssystem $Ax = b$ överbestämt.

Om två av ekvationerna motsäger varandra saknar systemet lösningar, vi har ett problem!

I så fall är en ide att välja x så att vi bara räknar ungefärligt rätt.

Det första vi frågar oss är hur vet vi hur bra vårt x är, dvs hur mäter vi felet vi gör?

Euklidiska normen

Ett sätt att beräkna felet är med den euklidiska normen. Använder vi den blir målet att minimera kvadraten på felet för varje komponent i vektorn (minstakvadratmetoden).

Den Euklidiska normen beräknas med,

$$||u||_2 = \sqrt{u^T u} = \sqrt{u_1 u_1 + u_2 u_2 + ... + u_n u_n}$$

Observera att om u och v är vinkelräta mot varandra gäller

$$u^T v = \sqrt{u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n} = 0$$

Vad innebär det att lösa systemet?

Ekvationssystemet $Ax = b$ kan skrivas på formen

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + ... + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

Med andra ord vi försöker skriva b som en linjärkombination av kolumnvektorerna i A.

Rummet som spänns upp av alla vektorer Ax kallas för kolumnrummet till A eftersom de kan skrivas som linjärkombinationer av kolumnvektorerna i A, se ekvationen ovan.

Det finns alltså en exakt lösning till systemet om b ligger i kolumnrummet till A.

Om vi väljer ett x hur stort är då felet?

Låt oss skriva felet vi gör som

$$e = Ax - b$$

Detta är enklast att förstå geometriskt

Eftersom kolumnvektorerna i A spänner upp ett n-dimensionelt hyperplan så kommer Ax alltid ligga i detta hyperplanet (se figuren).

Detta medför att felvektorn e är som minst när den är ortogonal mot hyperplanet, ty annars kan vi välja ett annat x som gör så att vektorn Ax kommer lite närmare vektorn b.

Vi säger att e ska vara ortogonal mot A:s kolumnvektorer, dvs

$$A^T e = 0$$

Vi vet att vi får minsta felet när e är ortogonal mot hyperplanet, på mattespråk blir det

$$0 = A^T e = A^T(Ax - b) = A^T Ax - A^T b$$

Det vill säga vi behöver bara lösa

$$A^T Ax = A^T b$$

Detta är formeln för att beräkna minstakvadrat-lösningen till ekvationssystemet

$$Ax \approx b$$

Exempel 4.6

Tidvattnet i Nordsjön bestäms av den så kallade M_2-tide, vars periodlängd är cirka tolv timmar och har formen

$H(t) = h_0 + a_1 \sin(\frac{2\pi t}{12}) + a_2 \cos(\frac{2\pi t}{12})$

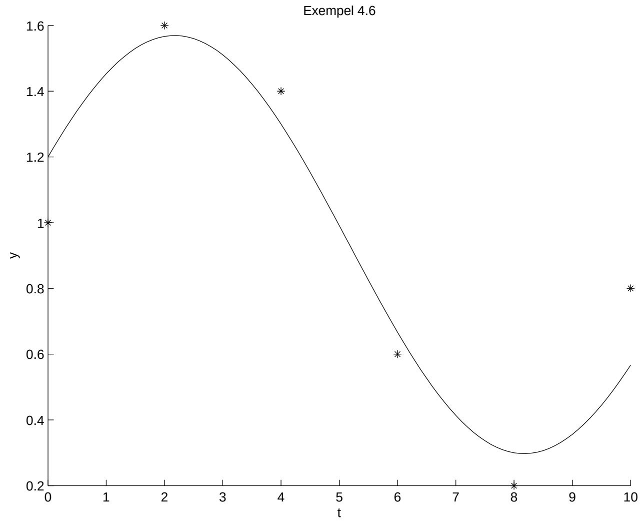
där t anges i timmar. Anpassa med minstakvadratmetoden $H(t)$ till mätdataserien:

```
t = [0 2 4 6 8 10]
y = [1.0 1.6 1.4 0.6 0.2 0.8]
```

exs46.m

```
clear,clf
t = [0 2 4 6 8 10]';
y = [1.0 1.6 1.4 0.6 0.2 0.8]';

A = [ones(size(t)) sin(t*pi/6) cos(t*pi/6)]

AtA = A'*A
Aty = A'*y

x = AtA \ Aty

title('Exempel 4.6')
xlabel('t')
ylabel('y')
hold on

plot(t, y, '*')

t2=0:0.1:10;
plot(t2, x(1) + x(2)*sin(t2*pi/6) + x(3)*cos(t2*pi/6))
```

```
>> format compact
>> exs46
A =
    1.0000         0    1.0000
    1.0000    0.8660    0.5000
    1.0000    0.8660   -0.5000
    1.0000    0.0000   -1.0000
    1.0000   -0.8660   -0.5000
    1.0000   -0.8660    0.5000
AtA =
    6.0000    0.0000   -0.0000
    0.0000    3.0000    0.0000
   -0.0000    0.0000    3.0000
Aty =
    5.6000
    1.7321
    0.8000
x =
    0.9333
    0.5774
    0.2667
```



Exempel 4.14

Följande mätdata beskriver vätskeflödet q som funktion av trycket p i munstycket till en vattenslang:

```
p = [10 16 25 40 60]
q = [94 118 147 180 230]
```

Man antar att flödet är proportionellt mot en obekant potens av trycket med en okänd proportionalitetskonstant. Bestäm de båda okända storheterna. Diskutera sedan hur man kan avgöra om antagandet är rimligt.

Lösning av exempel 4.14

Vi vet att $q = Cp^k$ där C och k är okända.

Vi börjar med att logaritmera bägge sidorna
$\ln(q) = \ln(Cp^k) = \ln(C) + k\ln(p)$

Vi kan nu skriva vårt problem på formen $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln(p_1) \\ 1 & \ln(p_2) \\ \ldots & \ldots \\ 1 & \ln(p_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ln(C) \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(q_1) \\ \ln(q_2) \\ \ldots \\ \ln(q_n) \end{pmatrix}$$

För att lösa det med minsta kvadratmetoden multiplicerar vi bägge sidorna med A^T

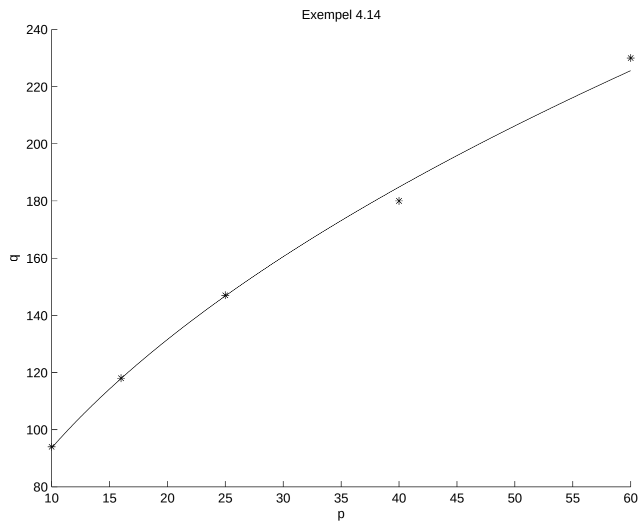
$A^T A x = A^T b$

och löser för x.

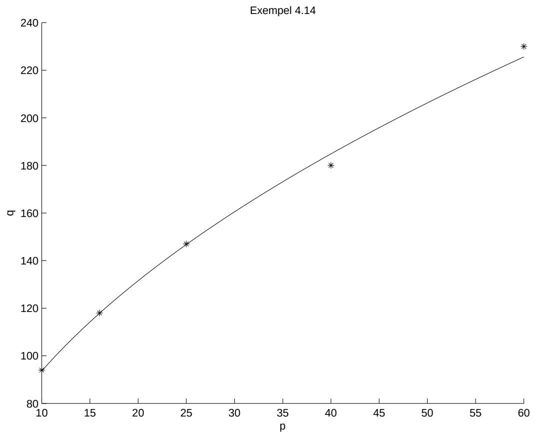
exs414.m

```
clear,clf

p = [10 16 25 40 60]';
q = [94 118 147 180 230]';

A = [ones(size(p)) log(p)];
b = log(q);

AtA = A'*A
Atb = A'*b

x = AtA \ Atb

hold on
title('Exempel 4.14')
xlabel('p'), ylabel('q')

plot(p, q, '*')

p2 = 10:0.1:60;
C = exp(x(1)); k = x(2);
plot(p2, C*p2.^k)

maxrelfelet = max(abs((q-C*p.^k)./q))
```

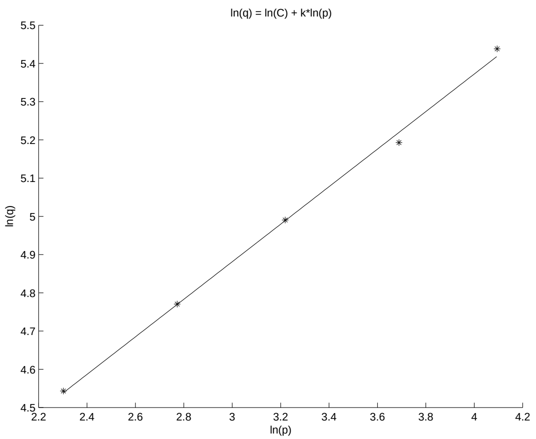
```
>> exs414
AtA =
    5.0000   16.0773
   16.0773   53.7218
Atb =
   24.9354
   81.1736
x =
    3.4083
    0.4910
maxrelfelet =
    0.0269
```



Minstakvadratfelet?



Rita i figuren!



Dagens pausbild...

Matlabdelen av exempel 5.3

Approximera ett fjärdegradspolynom genom punkterna (x,y) nedan

```
clear, clf

x = [1 3 4 5 7]';
y = [3 3 0 11 6]';

A = [ones(size(x)) x x.^2 x.^3 x.^4]
c = A\y

xc = 0:0.1:7;
plot(xc, c(1)+c(2)*xc + c(3)*xc.^2 + c(4)*xc.^3 + c(5)*xc.^4)
hold on
plot(x,y,'*')
```

Vi kör koden...

```
>> exs53
A =
           1           1           1           1           1
           1           3           9          27          81
           1           4          16          64         256
           1           5          25         125         625
           1           7          49         343        2401
c =
  -72.7500
  128.9375
  -64.9375
   12.5625
   -0.8125
```