Numeriska metoder, grundkurs II
Övning 3 för I2

Övningsgrupp 1

Johannes Hjorth
hjorth@nada.kth.se
Rum 163:006, Roslagstullsbacken 35
08 - 790 69 00

Kurshemsida:
`http://www.csc.kth.se/utbildning/kth/kurser/2D1240/numi07`

Material utdelat på övningarna:

`http://www.nada.kth.se/∼hjorth/teaching/numi07`

Dagens program

- Ögna igenom de gamla övningsanteckningarna
  Fler associationer i hjärnan innebär att det blir lättare för oss att komma ihåg informationen
- Interpolation med kubiska splines
  Skriv något kul här ...
- Trapetsmetoden
  Vi beräknar integraler
- Richardsonextrapolering
  Vi förbättrar resultatet utan att räkna mer!
- Substitutioner och svans-kapning
  Hur hanterar man elaka integraler?

Kubiska splines

Vi vill skapa en serie med hermitepolynom efter varandra, genom givna punkter, med första och andra derivatorna kontinuerliga.

Detta ger oss ett ekvationssystem...

$$\begin{pmatrix} 2h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & 2(h_1+h_2) & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 2(h_2+h_3) & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_4 & 2(h_3+h_4) & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & 2h_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

$$b_i = 3\left(\frac{h_{i-1}}{h_i}\Delta y_i + \frac{h_i}{h_{i-1}}\Delta y_{i-1}\right), i = 2, 3, 4$$

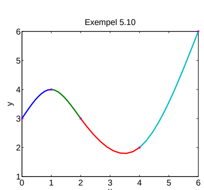
och för naturliga splines har vi $b_1 = 3\Delta y_1$ och $b_5 = 3\Delta y_4$

När k_i bestämts ur systemet kan vi rita polynomen

$$\begin{aligned} x(t) &= x_i + t \cdot h_i \\ y(t) &= y_i + t \cdot \Delta y_i + t(1-t) \cdot g_i + t^2(1-t) \cdot c_i \\ g_i &= h_i \cdot k_i - \Delta y_i \\ c_i &= 2\Delta y_i - h_i(k_i + k_{i+1}) \end{aligned}$$

Exempel 5.10

```
% Kubiska splines makes baby jesus cry...
x = [0 1 2 4 6]; y = [3 4 3 2 6]; h = diff(x); dy = diff(y);

% Vi räknar fram lutningarna som uppfyller villkoren
ud = [h(1) h(1:3)]; ld = [h(2:4) h(4)];
d = [2*h(1) 2*(h(1:3) + h(2:4)) 2*h(4)];
A = diag(d,0) + diag(ud,1) + diag(ld,-1);

b(2:4) = 3*(dy(2:4).*h(1:3)./h(2:4) + dy(1:3).*h(2:4)./h(1:3));
b(1) = 3*dy(1); b(5) = 3*dy(4);

k = A\b';

% Sen är det dags att rita allt, t är en kolumnmatris
t = linspace(0,1,10)';
g = h.*k(1:4)'-dy;
c = 2*dy - h.*(k(1:4)' + k(2:5)');

% Rita upp matriserna och fundera för att se vad som händer
xv = ones(size(t))*x(1:4) + t*(x(2:5) - x(1:4));
yv = ones(size(t))*y(1:4) + t*dy + t.*(1-t)*g ...
    + t.^2.*(1-t)*c;

% Varje kolumn i xv, yv svarar mot en hermite-kurva
plot(xv,yv,'-',x,y,'*')

title('Exempel 5.10'), xlabel('x'), ylabel('y')
```



Exempel 5.12

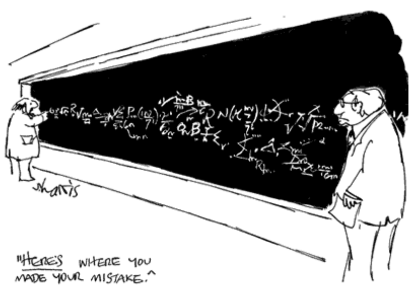
Vi ska anpassa en kurva till en kvartscirkel i första kvadranten.

Först med en kvadratisk Bézierkurva

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)^2\mathbf{p} + 2t(1-t)\mathbf{b} + t^2\mathbf{q}$$

Kurvan kommer att gå från **p** i riktning mot **b** för att sedan böja av mot **q**. Punkten **b** bestämmer lutningen i både **p** och **q**.

Här blir $\mathbf{p} = (0,1)$, $\mathbf{q} = (1,0)$ och $\mathbf{b} = (1,1)$.



För den kubiska Bézierkurvan gäller

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)^3\mathbf{p} + 3t(1-t)^2\mathbf{b} + 3t^2(1-t)\mathbf{c} + t^3\mathbf{q}$$

I **p** går kurvan i riktning mot **b**, och i **q** mot **c**.

Vi har två frihetsgrader kvar, vi kan bestämma hur långt bort **b** och **c** ska vara. Detta utnyttjar vi för att gå igenom mittpunkten på cirkelsegmentet

$$\mathbf{r}(\frac{1}{2}) = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$$

Vi kan teckna **b** och **c**

$$\mathbf{b} = \mathbf{p} + a_1 \cdot \mathbf{k}_1 = (0,1) + a_1(1,0) = (a_1, 1)$$
$$\mathbf{c} = \mathbf{q} + a_2 \cdot \mathbf{k}_2 = (1,0) + a_2(0,1) = (1, a_2)$$

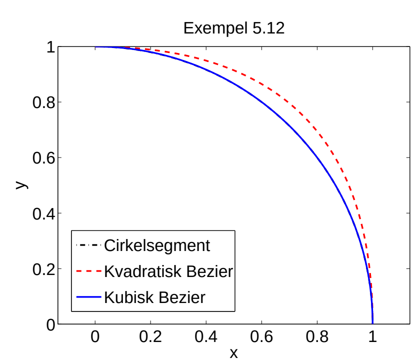
Stoppar vi in detta i formeln ovan får vi

$$a_1 = a_2 = \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)$$

```
% Cirkelsegment
v = linspace(0, pi/2, 100);
x = cos(v);
y = sin(v);

% Kvadratisk Bézierkurva
p = [0,1];  q = [1,0];  b = [1,1];
t = linspace(0,1,100)'; % obs, transponat

r2 = (1-t).^2*p + 2*t.*(1-t)*b + t.^2*q;

% Kubisk Bézierkurva
a = 4/3*(sqrt(2)-1);
b = [a,1];  c = [1,a];

r3 = (1-t).^3*p + 3*t.*(1-t).^2*b ...
    + 3*t.^2.*(1-t)*c + t.^3*q;

% Plotta
leg = plot(x,y,'-.k', r2(:,1), r2(:,2),'--r', ...
           r3(:,1), r3(:,2), '-b');

legend(leg, 'Cirkelsegment', ...
            'Kvadratisk Bézier', ...
            'Kubisk Bézier')

title('Exempel 5.12')
xlabel('x'), ylabel('y')
axis equal
```

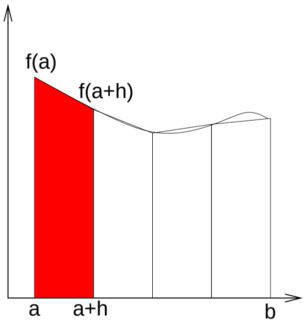
Vi ser att den kvadratiska Bézierkurvan avviker som mest från cirkelsegmentet i mittpunkten.

Den kubiska varianten ligger dock mycket nära. Vi måste zooma in i grafen för att skilja dem åt.



Trapetsmetoden

Med trapetsmetoden delar vi upp integralen, och beräknar ytan av varje segment för sig.



vilket kan skrivas:

$$\int_a^b f(x) = h\cdot\frac{f(a)+f(a+h)}{2} + h\cdot\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2} + \cdots + h\cdot\frac{f(b-h)+f(b)}{2}$$

Grupperar vi om termerna får vi:

$$\int_a^b f(x) = h \cdot \sum_{i=0}^{n} f(x + n \cdot h) - h \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Ändpunkterna förekommer inte dubbelt!

Exempel 6.2a

Vi vill lösa

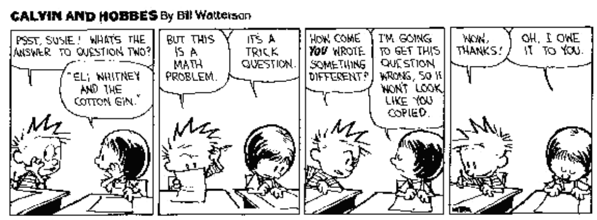
$$\int_0^3 \frac{e^x}{1+2x^3}dx$$

med fyra korrekta decimaler.

Först skriver vi en funktion i filen `f62a.m`

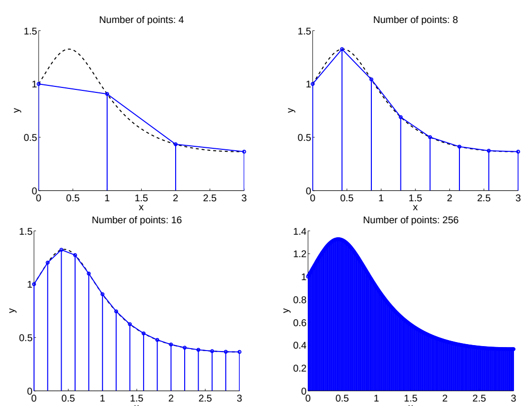
```
function y = f62a(x)

y = exp(x)./(1 + 2*x.^3);
```

Det är viktigt att funktionen kan hantera vektorer korrekt.




```
clear all, format long, format compact

xf = linspace(0,3,100); yf = f62a(xf);

n = 4; tol = 0.5e-4; corr = inf; F = inf;

while(abs(corr) > tol)
   % Skapa x-vektorn, beräkna h, spara undan gamla F
   x = linspace(0,3,n);   h = x(2)-x(1);   oldF = F;

   % Trapetsmetoden
   F = h*(sum(f62a(x)) - 0.5*(f62a(x(1))+f62a(x(end))));
   corr = F - oldF;
   disp([F corr])

   % Detta är bara för att få lite pedagogiska figurer
   clf, hold on
   plot(xf,yf,'k--', x,f62a(x),'b-')
   stem(x,f62a(x))

   xlabel('x'), ylabel('y')
   title(['Number of points: ' num2str(n)])
   pause

   % Uhm... kom ihåg denna raden bara!
   n = 2*n;

end
```

Vi ser hur algoritmen successivt ger en bättre approximation till integralen




```
>> tal62a
   2.023340091791105                 -Inf
   2.154846177270823    0.131506085479717
   2.166983674362637    0.012137497091814
   2.169542299834801    0.002558625472164
   2.170131096270010    0.000588796435208
   2.170272688056837    0.000141591786827
   2.170307426394107    0.000034738337270
>>
```

Exempel 6.2b

Nu ska vi istället lösa integralen

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$$

Observera att matlab bråkar då vi dividerar med 0.

Det kan vi lösa på två sätt, antingen skriver vi en funktion som klarar av att hantera $x = 0$, eller så undviker vi att skicka det värdet.

Facits metod, i trapetsmetoden byter vi ut

```
x = linspace(0,pi,n);  h = x(2) - x(1);
y = f62b(x);
F = h*(sum(y) - (y(1) + y(end))/2);
```

mot

```
x = linspace(0,pi,n);  h = x(2) - x(1);
y = [1 f62b(x(2:end))];
F = h*(sum(y) - (y(1) + y(end))/2);
```

Vi skickar helt enkelt aldrig $x = 0$ till funktionen.

Alternativt, vi skriver en funktion som klarar av alla x-värden. För att hantera $x = 0$ behöver vi byta ut det felaktiga värdet `NaN` (not a number) mot $y = 1$.

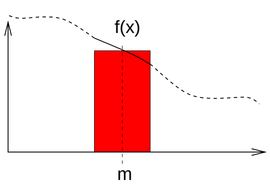
Vi använder `find` för att leta nollan, den retunerar positionen på elementet i vektorn.

```
function y = f62b(x)

% Kommer att ge varning för x = 0
y = sin(x)./x;

% Vi vill att den räknar rätt y, så leta upp det
% felaktiga värdet med find(x == 0) och sätt det till 1.

% Find returnerar positionen i vektorn
i = find(x == 0);

% Byt ut y-värdet för det x-värdet mot 1
y(i) = 1;
```

Vi kan sen använda trapetsmetoden från föregående uppgift, behöver bara byta integrationsgränser och funktionsnamn.

Det går att undvika varningen också med `find`, men det lämnas som övning åt den som bara *måste* veta. Här ville jag endast visa hur `find` används.

Härledning av Trapetsregelns felterm



Vi tecknar stapelns area, den har bredd h.

$$\int f(x)dx = \int f(m) + f'(m)(x-m) + f''(m)\frac{(x-m)^2}{2!} + \cdots dx$$

Integrerar vi Taylorutvecklingen får vi

$$\left[f(m)(x-m) + f'(m)\frac{(x-m)^2}{2} + f''(m)\frac{(x-m)^3}{3 \cdot 2!} \right]_{m-\frac{h}{2}}^{m+\frac{h}{2}}$$

vilket blir

$$A = f(m) \cdot h + f''(m)\frac{h^3}{3} + \cdots$$

Kubisk felterm?! Nej, nu är assen ute och snurrar...
Det ska ju bli kvadratiskt, vad har vi missat?

Richardsonextrapolering

Antag att vi räknat på trapetsregeln

$$T(2h) = A + c \cdot (2h)^2 = A + 4ch^2 + O(h^4)$$

och sedan halverat steglängden och räknat igen

$$T(h) = A + c \cdot h^2 + O(h^4)$$

Borde vi inte kunna få fram ett bättre värde på A?

Vi kan teckna första feltermen som

$$c \cdot h^2 = \frac{T(2h) - T(h)}{3}$$

Drar vi bort den från T(h) får vi ett bättre värde!

Exempel och `quadl`

Vi testar Richardsonextrapolering på några värden från exempel 6.2a

```
>> tal62a
   2.023340091791105                 -Inf
   2.154846177270823    0.131506085479717
   2.166983674362637    0.012137497091814
   2.169542299834801    0.002558625472164
   2.170131096270010    0.000588796435208
   2.170272688056837    0.000141591786827
   2.170307426394107    0.000034738337270
```

Vi tar värdena från tredje och fjärde raden och utför Richardsonextrapolering.

```
>> 2.169542299834801 - (2.166983674362637 - 2.169542299834801)/3
ans =
   2.170395174992189
```

Vi får ett förbättrat värde, trevligt!

Kontrollera svaret med `quadl` och tolerans 10^{-8}

```
>> quadl(@f62a,0,3,1e-8)
ans =
   2.170318884126325
```

Svanskapning

Vi ska beräkna

$$\int_0^\infty \frac{30}{1+x^4+\sqrt{1+x^3}}dx$$

Börja med att dela upp integralen i två delar, från 0 till A och från A till ∞.

Därefter väljer vi A så stort att den andra integralen blir försumbar, vi måste dock visa det också.

$$\int_A^\infty \frac{30}{1+x^4+\sqrt{1+x^3}}dx < \int_A^\infty \frac{30}{x^4}dx < 10^{-8}$$

vilket ger att

$$\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{30}{x^3}\right]_A^\infty = \frac{10}{A^3} < 10^{-8} \Rightarrow A > 1000$$

för stora A så är felet i svansen försumbart.

Vi beräknar sedan första halvan av integralen med den inbyggda funktionen `quadl`.

Sammanfattning

- Interpolation, följ kokboksrecepten och ta det lugnt.
- Trapetsmetoden har kvadratiskt fel, kom ihåg Richardsonextrapolering. Typiskt teorital att man får några funktionsvärden och ska beräkna ett bättre värde.
- När ni använder `quadl` måste funktionen klara av vektorer.
- För vilka värden är funktionen definierad, är det någonstans då nämnaren blir noll. Måste vi specialbehandla?
- Om integralen går till oändligheten, kan vi visa att den sista biten är begränsad? Kapa!
  Kom ihåg att ta med svansfelet i felgränsen!

Tappa inte tallriken...