# Föreläsning 5. Sju kriser i matematikens historia

Detta är ett sammandrag av det som gicks igenom på föreläsningen.

## *Tre komponenter i matematik*

1. Att välja definitioner på ett bra sätt.

2. Att göra kreativa konstruktioner.

3. Att göra logiska verifieringar.

Den sista komponenten är den som vanligen betonas. Hur överens är matematiker om hur bevis får se ut? Vi ser på sju stycken bevis som har varit kontroversiella.

## *Kris 1. Pythagoras och $\sqrt{2}$*

Pythagoras och hans lärjungar bevisade att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal. De gjorde det genom att visa att om man antar att roten har formen m/n kommer det att leda till en motsägelse.

**Kris:** Det finns irrationella tal. Kan man verkligen använda motsägelsebevis?

## *Kris 2. Icke-euklidisk geometri*

I Euklides *Elementa* som utgör en axiomatisering av geometrin finns det s.k. *parallellaxiomet*.

Givet en linje *l* och en punkt *P* som inte ligger på *l* så finns det en unik linje som går genom *P* och som inte möter *l*.

Försök gjordes att bevisa axiomet men de försöken misslyckades.

Under första halvan av 1800-talet konstruerar Gauss, Boyai och Lobachevskij en ny typ av icke-euklidisk geometri där parallelaxiomet är falskt.

**Kris:** Euklides axiom är inte nödvändiga. Vi kan konstruera nya geometrier.

## *Kris 3. Fourier och hans serier*

Fourier visar att alla periodiska funktioner, även sådana som inte är kontinuerliga överallt, kan skrivas som en oändlig summa av trigonometriska funktioner.

**Kris:** Hur kan en summa av kontinuerliga funktioner bli en diskontinuerlig funktion? Vad är egentligen en funktion? Vad är egentligen kontinuitet?

## *Kris 4.Transcendentala tal*

Ett *algebraiskt* tal är ett tal som är nollställe till något polynom med heltalskoefficienter.

Ett *transcendentalt* tal är ett tal som inte är algebraiskt.

Finns det transcendentala tal?

Cantor visade att de finns genom ett mycket speciellt resonemang. Han visade att mängden av algebraiska tal är *uppräknelig.* Därefter visade han med sitt berömda diagonalargument att mängden av reella tal är överuppräknelig. Det visar att nästan alla tal är transcendentala.

**Kris:** Cantor visade att något existerade utan att ge något konkret exempel. Han använde en motsägelse för att visa att det fanns. Får man göra så?

## *Kris 5. Russells paradox*

Matematikern och logikern Frege använde mängdlära. Han antog att om man hade ett predikat P(x) så kan man alltid bilda mängden { x : P(x) } . Men det finns ett problem. Russell påpekade att vi får problem om vi låter P(x) =  "x tillhör inte x". Om vi nu bildar M = { x : P(x) } så får vi problem. Både "M tillhör M" och "M tillhör inte M" leder till motsägelse. Det visar att M inte kan existera.

**Kris:**  Frege var en etablerad och framstående matematiker. Hans intuition var ändå fel. Kan vi någonsin lita på vår intuition?

## *Kris 6. Gödels ofullständighetssats*

Gödel visade att om man har ett logiskt system (som uppfyller vissa tekniska krav) går det att konstruera en formel *G* som varken går att bevisa eller motbevisa i systemet men som ändå är "sann" i en viss mening.

**Kris:** I alla logiska system finns det formler som är sanna men som inte går att bevisa (eller rättare sagt inte går att bevisa på ett effektivt sätt).

*Kris 7 hann vi inte med på föreläsningen. Men vi nämner den ändå.*

## *Kris 7. Beviset för fyrfärgssatsen*

Fyrfärgssatsen: Varje planär graf kan färgas med fyra färger.

Appel och Haken bevisade denna sats 1974. I beviset ingick att 1936 speciella delgrafer skulle undersökas. Det som skulle undersökas var om en viss typ av omfärgning gick att genomföra på delgraferna. Appel och Haken lät ett datorprogram göra denna undersökning på de 1936 delgraferna. Resultatet av programmets körning var en del av det publicerade beviset.

**Kris:** Kan man verkligen lita på ett bevis som har genererats av ett datorprogram?