# DD1350 Logik för dataloger

Omtentamen
2 juni 2014, 14.00 - 19.00

*Dilian Gurov*
KTH CSC

Skriv varje problem på ett separat blad. Skriv ditt namn på alla blad. Flera formelblad är bifogade; inga andra hjälpmedel är tillåtna.

---

## Del E

Om du fick minst betyg E på kontrollskrivningen i oktober 2013 kan du hoppa över första uppgiften, som då redan är godkänd. För att uppnå betyg E krävs 16 poäng på E-delen, inklusive tillgodoräknade bonuspoäng från hemtal och labbar.

1. **Satslogik: Naturlig deduktion**. Bevisa följande sekvent med naturlig deduktion: $\boxed{4}$

$$\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$$

Rita tydligt alla boxar för att visa räckvidden för alla antaganden i beviset. Ett formelblad med alla regler är bifogat.

2. **Predikatlogik: Semantik**. Låt $M_\Theta$ vara mängden av alla modeller i vilka formeln $\Theta$ är sann, och låt $M_\Psi$ vara mängden av alla modeller i vilka formen $\Psi$ är sann. Om vi vet att $M_\Theta \subseteq M_\Psi$, kan vi då dra slutsatsen att $\Theta \models \Psi$, eller att $\Psi \models \Theta$, eller ingen av dessa slutsatser? Motivera ditt svar! $\boxed{5}$

3. **Strukturell induktion: Definition**. Datstrukturen *röd-svart träd* kan definieras med BNF så här: $\boxed{5}$

$$\mathit{RBTree} ::= \mathsf{leaf}\ (\mathit{Color}) \mid \mathsf{branch}\ (\mathit{RBTree}, \mathit{RBTree})$$

där $\mathit{Color} ::= \mathsf{red} \mid \mathsf{black}$. Använd strukturell induktion för att definiera funktionen $\mathbf{numreds}(t)$ som returnerar antalet röda löv i trädet $t$. Använd din definition för att *stegvis* utvärdera:

$$\mathbf{numreds}(\mathsf{branch}(\mathsf{leaf}(\mathsf{black}), \mathsf{branch}(\mathsf{leaf}(\mathsf{red}), \mathsf{leaf}(\mathsf{black}))))$$

4. **Temporallogik: Semantik**. Betrakta den temporala logiken CTL och dess formella semantik. $\boxed{5}$

   (a) Förklara intuitivt betydelsen av CTL-formeln $\mathsf{EF}\ (q \wedge \mathsf{AG}\ p)$ i godtycklig modell $\mathcal{M}$ och tillstånd $s$.

   (b) Låt $\mathit{Atoms} \stackrel{\text{def}}{=} \{p, q\}$ och låt $\mathcal{M}$ vara modellen definierad som:

$$\begin{array}{rcl} S & \stackrel{\text{def}}{=} & \{s_1, s_2, s_3\} \\ \rightarrow & \stackrel{\text{def}}{=} & \{(s_1, s_2), (s_2, s_3), (s_3, s_3)\} \\ L & : & s_1 \mapsto \{p\} \\ & & s_2 \mapsto \{p\} \\ & & s_3 \mapsto \{p\} \end{array}$$

   Rita den tillhörande tillståndsgrafen. Gäller $\mathcal{M}, s_1 \models \mathsf{EF}\ (q \wedge \mathsf{AG}\ p)$? Motivera ditt svar med hänvisning till CTLs formella semantik.

5. **Hoare–logik: Specifikation**. Betrakta ett ännu inte implementerat program $\mathsf{TwoPow}$ som beräknar funktionen $2^{2^n}$ för icke-negativa heltal $n$. $\boxed{5}$

   (a) Med hjälp av en Hoare-trippel, *specificera* programmet $\mathsf{TwoPow}$ enligt partiell korrekthet. Det skall vara entydigt från specifikationen hur programmet ska användas för att beräkna potensen $2^{2^n}$ av ett heltal $n$. Motivera din specifikation.

   (b) Presentera en *implementation* av $\mathsf{TwoPow}$ i form av ett program i det C-liknande programmeringsspråket betraktat i kursen som satisfierar din specifikation.

## Del C

Om du fick betyg C på kontrollskrivningen i oktober 2013 kan du hoppa över första uppgiften, som då redan är godkänd. För att uppnå betyg C krävs 12 poäng, och för betyg D krävs 8 poäng på C-delen. I bägge fallen krävs även godkänt på E-delen.

1. **Strukturell induktion: Principen**. Betrakta mängden av alla satslogiska formler, definierad som en termmängd i BNF. Kan man definiera med strukturell induktion en funktion $nats(\phi)$ som tar en satslogisk formel $\phi$ som argument och returnerar antalet *förekomster* av negerade atomära formler i $\phi$? Till exempel, $nats(\neg p \wedge (q \vee \neg p))$ ska returnera 2. Motivera ditt svar. $\boxed{6}$

2. **Temporallogik: Modellprovning**. Betrakta igen modellen $\mathcal{M}$ och CTL-formeln $\mathsf{EF}\ (q \wedge \mathsf{AG}\ p)$ från uppgift E4b. Presentera ett *bevis* till $\mathcal{M}, s_1 \vdash \mathsf{EF}\ (q \wedge \mathsf{AG}\ p)$ som ett bevisträd i bevissystemet för CTL, eller gör det minsta nödvändiga ändringen till modellen så att sekventen blir sant, och gör då beviset. Glöm inte att ange reglernas namn i beviset. Ett formelblad med alla regler är bifogat. $\boxed{6}$

3. **Hoare–logik: Slinginvarianter**. Utgående från slinginvarianten $z = x \cdot i$, implementera ett program Mult i det C-liknande programmeringsspråket betraktat i kursen som beräknar produkten av två heltal utan att använda sig av multiplikation, dvs med upprepad addition i en slinga som uppfyller invarianten. $\boxed{6}$

---

## Del A

För att uppnå betyg A krävs 12 poäng, och för betyg B krävs 8 poäng på A-delen. I bägge fallen krävs även godkänt på C-delen.

1. **Temporallogik: Modellprovningsregler**. Betrakta bevissystemet för CTL (se bifogat formelblad). Föreslå regler till temporala tillståndskvantifikatorn W kallad *weak until*, med semantiken att $\phi \mathsf{W} \psi$ är sant i en stig om antigen $\psi$ är sant i något tillstånd i stigen och $\phi$ är sant i all tidigare tillstånd, eller om $\phi$ är sant i alla tillstånd i stigen. Observera att det finns två stigskvantifikatorer A och E. $\boxed{6}$

2. **Strukturell induktion: Bevis**. Betrakta igen datastrukturen röd-svart träd och din definition av funktionen **numreds**$(t)$ från uppgift E3. $\boxed{6}$

   (a) Definiera med strukturell induktion funktionen **numleaves**$(t)$ som returnerar totala antalet löv i röd-svarta trädet $t$.

   (b) Använd dina definitioner för att bevisa med strukturell induktion att antalet röda löv i röd-svarta träd är mindre eller lika med totala antalet löv i trädet, dvs:

   $$\forall t\ \mathbf{numreds}(t) \leq \mathbf{numleaves}(t)$$

3. **Hoare–logik: Verifikation**. Betrakta igen din implementation av programmet Mult från uppgift C3 och dess slinginvariant $z = x \cdot i$. $\boxed{6}$

   (a) Specificera programmet med en Hoare-trippel.

   (b) Verifiera programmet, dvs bevisa att Mult uppfyller din specifikation inklusive slinginvarianten. Presentera beviset som *bevistablå*. Identifiera alla bevisförpliktelser (resulterande från regeln Implied) och motivera varför de gäller. Ett formelblad med alla regler är bifogat.

---

*Lycka till!*