Viggo Kann, KTH CSC

Lösningar till teoritenta i Algoritmer (datastrukturer) och komplexitet för KTH 2D1352–1354 och SU 2007-05-16

1. (8 p) Är följande påståenden sanna eller falska? För varje deluppgift ger riktigt svar 1 poäng och ett övertygande motiverat riktigt svar 2 poäng.

   A) En algoritm med tidskomplexiteten $O(n^3 \log(3^n))$ går i polynomisk tid.

   Sant. $O(n^3 \log(3^n)) = O(n^3 \cdot n) = O(n^4)$ som är ett polynom.

   B) En *heuristik* är en algoritm som hittar en optimal lösning till ett optimeringsproblem, även om det tar exponentiell tid.

   Falskt. En heuristik är en algoritm som hittar en icke-optimal lösning till ett optimeringsproblem, oftast snabbt. Lösningen kan vara hur dålig som helst.

   C) Ett *bloomfilter* är en lämplig datastruktur om man vill lagra ett adressregister och snabbt kunna slå upp en adress i det.

   Falskt. Ett bloomfilter används för att lagra en mängd så att man kan kontrollera mängdtillhörighet snabbt. Hela adresser går inte att lagra i ett bloomfilter.

   D) Med hjälp av *FFT* kan man multiplicera polynom av höga gradtal effektivt.

   Sant. FFT är en dekompositionsalgoritm som i tid $O(n \log n)$ transformerar ett n-tegradspolynom i koefficientform till punkt-värdeform eller tvärtom. När man gått över till punkt-värdeform kan polynommultiplikationen enkelt utföras i linjär tid. Därför tar multiplikation av två n-tegradspolynom tid $O(n \log n)$ med FFT.

2. (2 p) Betrakta följande fråga:

   > Om det för ett visst beslutsproblem går att verifiera både ja-lösningar och nej-lösningar i polynomisk tid, är man säker på att problemet kan lösas i polynomisk tid?

   Du ska inte svara på frågan (svaret är förmodligen nej) utan bara formulera frågan med hjälp av komplexitetsklasser istället för ord.

   Svar: Är $NP \cap co-NP \subseteq P$?
   NP är klassen av beslutsproblem för vilka man kan verifiera ja-lösningar i polynomisk tid.
   co-NP är klassen av beslutsproblem för vilka man kan verifiera nej-lösningar i polynomisk tid.
   P är beslutsproblem som kan lösas i polynomisk tid.

3. (5 p) Om man ska visa att ett beslutsproblem är NP-fullständigt ska man dels visa att det tillhör NP och dels visa att det är NP-svårt. Förklara med ord, men utan att ge exempel, hur man brukar visa att ett problem tillhör NP och vilka steg som ingår i ett normalt bevis av att ett problem är NP-svårt.

   Tillhör NP: Beskriv vad en ja-lösning ska bestå av och visa att det finns en polynomisk algoritm, givet en probleminstans och en påstådd ja-lösning, som kan verifiera att svaret verkligen är ja.

   Är NP-svårt: Hitta ett känt NP-fullständigt problem och reducera det till det undersökta problemet. Visa att reduktionen tar polynomisk tid och att den transformerar ja-instanser till ja-instanser och nej-instanser till nej-instanser.

4. (5 p) Här är en approximationsalgoritm:

$S \leftarrow \emptyset$
while $E \neq \emptyset$ **do**
    ta en godtycklig kant (v_1, v_2) från E
    $S \leftarrow S \cup \{v_1, v_2\}$
    plocka från E bort alla kanter som har ändpunkt i v_1 eller v_2
return S

Vilket problem är det som algoritmen approximerar? Minimal hörntäckning.

Vilken tidskomplexitet har algoritmen? $O(|E|)$.

Vilken approximationskvot har algoritmen? 2.

Motivering av approximationskvoten: Titta på grafen M som består bara av dom kanter som någon gång har tagits (i första raden i slingan) i algoritmen. Denna graf är en delgraf till den ursprungliga grafen och har därför en hörntäckning som är högst lika stor som den optimala hörntäckningen till ursprungsgrafen. Dessutom är kanterna i M disjunkta, så en optimal hörntäckning får man genom att ta ena hörnet från varje kant. Detta är precis hälften av dom hörn som approximationsalgoritmen tar med, varför $APPROX/OPT = 2OPT_M/OPT \leq 2OPT/OPT = 2$.

På kursens webbsida http://www.csc.kth.se/2D1352/adk07/ ligger en kursenkät som var och en uppmanas att svara på så snart som möjligt. Viggo och nästa års elever på kursen tackar på förhand!

Vill du ha högre betyg på kursen? Om du har fått minst betyg 4 på två av dom betygsatta kursmomentet (teoritentan, mästarprov 1, mästarprov 2) och minst betyg 3 på det tredje så får du boka in dej på muntlig redovisning nästa vecka. Tryck på knappen på kursens webbsida http://www.csc.kth.se/2D1352/adk07/ för att få boka en tid. Välj om du vill redovisa för betyg 4, 5 eller VG.

SVAREN!