

FÖRELÄSNING 18

REDUKTIONER

KAN ANVÄNDAS TILL ATT

- VISA POSITIVA RESULTAT (HITTA ALGORITMER)
- VISA NEGATIVA RESULTAT (UNDRE GRÄNSER)
- VISA ATT ETT PROBLEM ÄR SVÄRARE ÄN ETT ANNAT
- VISA ATT TVÅ PROBLEM ÄR LIKA SVÅRA

OLIKA VARIANTER AV PROBLEM

OLIKA VARIANTER AV REDUKTIONER

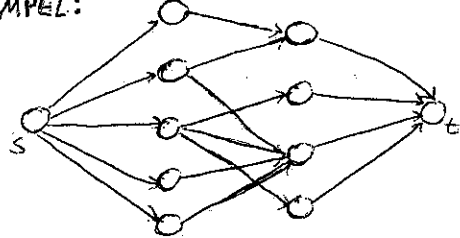
BIPARTIT MATCHNING

INDATA: BIPARTIT GRAF $\langle U \cup V, E \rangle$

UTDATA: EN MATCHNING $M \subseteq E$ AV MAXIMAL STÖRLEK

M ÄR EN MATCHNING OM INGA KANTER I M HAR NÅGON GEMENSAM ÄNDPUNKT.

EXEMPEL:



REDUKTION AV BIPARTIT MATCHNING TILL FLÖDE:

BIPARTITE-MATCHNING $(U, V, E) =$

- KONSTRUERA GRAF $\langle V', E' \rangle$ SOM

$$V' = U \cup V \cup \{s, t\}$$

$$E' = \{(u, v) : u \in U, v \in V, (u, v) \in E\} \cup$$

$$\cup \{(s, u) : u \in U\} \cup$$

$$\cup \{(v, t) : v \in V\}$$

$$c(e) = 1 \quad \forall e \in E'$$

- RETURN (FORD-FULKERSON $(V', E') \cap E$)

REPRESENTANTPROBLEMET

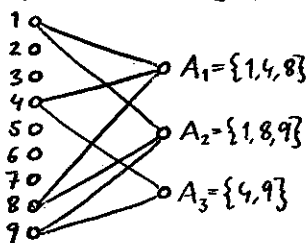
INDATA: k STYCKEN MÄNGDER A_1, \dots, A_k AV HECTAL MELLAN 1 OCH k^2

UTDATA: EN MÄNGD MED k OLIKA TAL a_1, \dots, a_k SÅ ATT $a_i \in A_i$ FÖR $1 \leq i \leq k$

ALGORITM: REDUCERA PROBLEMET TILL BIPARTIT MATCHNING!

REPRESENTANT $(A_1, \dots, A_k) =$
$U \leftarrow \{1, \dots, k^2\}$
$V \leftarrow \{A_1, \dots, A_k\}$
$E \leftarrow \{(x, A) : x \in U, A \in V, x \in A\}$
$M \leftarrow \text{BIPARTITMATCHNING}(U, V, E)$
RETURN $\{x : (x, A) \in M \text{ FÖR NÅGOT } A\}$

EXEMPEL: $k=3, A_1 = \{1, 4, 8\}, A_2 = \{1, 8, 9\}, A_3 = \{4, 9\}$



GENERELL VIKTAD MATCHNING

DET FINNS EN POLYNOMISK ALGORITM SOM LÖSER MAXIMAL MAXMATCHNING:

INDATA: GRAF $G=(V,E)$, KANTVIKTER $c: E \rightarrow \mathbb{N}$

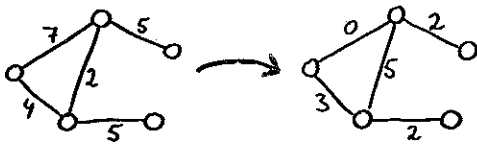
UTDATA: MATCHNING $M \subseteq E$ SOM DELS INNEHÅLLER SÅ MÅNGA KANTER SOM MÖJLIGT OCH DELS HAR SÅ STOR SAMMANLAGD VIKT SOM MÖJLIGT.

BESKRIV EN ALGORITM FÖR PROBLEMET

MINIMAL MAXMATCHNING DÄR SAMMANLAGDA VIKTEN AV KANTERNA I MAXMATCHNINGEN ÄR MINIMAL!

REDUCERA MINIMAL MAXMATCHNING TILL MAXIMAL MAXMATCHNING

MINIMAL MAXMATCHNING ($G'=(V',E')$, $f: E' \rightarrow \mathbb{N}$) =
 $w \leftarrow \max_{e \in E'} f(e)$
 DEFINIMERA $c(e)$ SOM $w - f(e)$
 $M \leftarrow \text{MAXIMAL MAXMATCHNING}(G', c)$
 RETURN M



MAX KLICK

INDATA: GRAF G

UTDATA: ANTAL HÖRN I DEN STÖRSTA KLICKEN (FULL-STÄNDIGA DELGRAFEN) I G

REDUCERA MAX KLICK TILL MAX OBEROENDE MÄNGD!

MAX KLICK (G) =
 $\bar{G} \leftarrow \text{KOMPLEMENTGRAFEN TILL } G$
 RETURN MAX OBEROENDE MÄNGD(\bar{G})

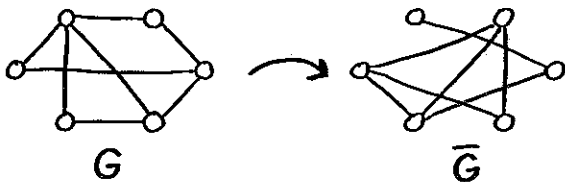
MAX OBEROENDE MÄNGD

INDATA: GRAF G

UTDATA: ANTAL HÖRN I DEN STÖRSTA OBEROENDE MÄNGDEN (HÖRN UTAN KANTER MELLAN) I G

REDUCERA MAX OBEROENDE MÄNGD TILL MAX KLICK!

MAX OBEROENDE MÄNGD (G) =
 $\bar{G} \leftarrow \text{KOMPLEMENTGRAFEN TILL } G$
 RETURN MAX KLICK(\bar{G})



MAX KLICK OCH MAX OBEROENDE MÄNGD ÄR LIKA SVÅRA!

VISA NEGATIVA RESULTAT MED REDUKTION

SORTERING ($A[1..n]$) =
 $T \leftarrow \text{BYGG SÖKTRÄD}(A)$
 $\text{INDEX} \leftarrow 1$
 $\text{INORDER}(T)$
 RETURN A

INORDER (T) =
 IF $T \neq \text{NIL}$ THEN
 $\text{INORDER}(T.\text{LEFT})$
 $A[\text{INDEX}] \leftarrow T.\text{VALUE}$
 $\text{INDEX} \leftarrow \text{INDEX} + 1$
 $\text{INORDER}(T.\text{RIGHT})$

VI HAR REDUCERAT SORTERING TILL SÖKTRÄDSBYGGE.

TIDEN FÖR SORTERING ÄR TIDEN FÖR BYGG SÖKTRÄD PLUS TIDEN FÖR INORDER (SOM ÄR $O(n)$).

OM BYGG SÖKTRÄD GICK SNABBARE ÄN $\theta(n \log n)$ SKULLE DET ALLTSÄ GÅ ATT SORTERA SNABBARE ÄN $\theta(n \log n)$.

REDUKTIONEN HAR FÖRT ÖVER DEN UNDER GRÄNSEN PÅ $\Omega(n \log n)$ JÄMFÖRELSE FÖR SORTERING TILL SÖKTRÄDSBYGGE.

OM P KAN REDUCERAS TILL Q OCH P ÄR SVÅRT SÅ ÄR Q OCKSÅ SVÅRT!

OLIKA VARIANTER AV PROBLEM

1. BESLUTSPROBLEM (UTDATA ÄR SANT/FALSKT)

INDATA: GRAF G , HELTAL K

FRÅGA: FINNS DET EN KLICK AV STÖRLEK $\geq K$ I G ?

2. OPTIMERINGSPROBLEM (MAXIMERA EN MÅLFUNKTION)

INDATA: GRAF G

UTDATA: STÖRLEKEN AV STÖRSTA KLICKEN I G

3. KONSTRUKTIONSPROBLEM

INDATA: GRAF G

UTDATA: HÖRNEN I EN KLICK AV MAXSTÖRLEK I G

REDUKTIONER MELLAN PROBLEMVARIANTER

REDUCERA OPTIMERINGSPROBLEM TILL BESLUTSPROBLEM:

```
MAXKLICK( $G=(V,E)$ ) =  
   $i \leftarrow 1$ ;  $j \leftarrow |V|$   
  WHILE  $i < j$  DO  
     $m \leftarrow \lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor$   
    IF BESLUTKLICK( $G, m$ ) THEN  $i \leftarrow m$   
    ELSE  $j \leftarrow m-1$   
  RETURN  $i$ 
```

REDUCERA KONSTRUKTIONSPROBLEM TILL OPTIMERINGSPROBLEM:

```
KONSTRUKTIVMAXKLICK( $G=(V,E)$ ) =  
   $m \leftarrow \text{MAXKLICK}(G)$   
   $S \leftarrow V$   
  FOR EACH  $u \in V$  DO  
    IF MAXKLICK( $S - \{u\}$ ) =  $m$  THEN  
       $S \leftarrow S - \{u\}$   
  RETURN  $S$ 
```

TURING- OCH KARPREDUKTIONER

EN TURINGREDUKTION AV PROBLEMET P TILL PROBLEMET Q ÄR EN ALGORITM FÖR P SOM ANROPAR EN ALGORITM FÖR Q EN ELLER FLERA GÅNGER.

```
P(x) =  
  ⋮  
  (NÄR ANROPAS ALGORITM FÖR Q)  
  ⋮  
  RETURN y
```

EN KARPREDUKTION AV P TILL Q ÄR DET SPECIALFALL AV TURINGREDUKTION DÄR P OCH Q ÄR BESLUTSPROBLEM, DÄR ALGORITMEN FÖR Q BARA ANROPAS EN GÅNG, OCH DÄR RESULTATET FRÅN DEN ALGORITMEN DIREKT RETURNERAS

```
P(x) =  
  KONSTRUERA EN PROBLEM-  
  INSTANS  $y$  TILL  $Q$   
  RETURN  $Q(y)$ 
```