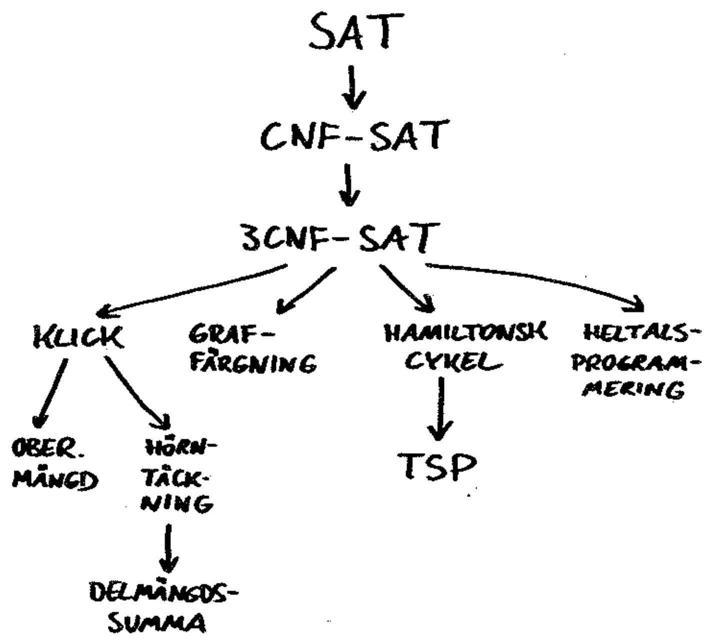
Föreläsning i ADK

NP-fullständighetsbevis

- Satisfierbarhetsproblem
- Andra användbara problem
- 0-1-programmering
- Delgrafsisomorfi
- Mängdpartitionering

Vidare reduktioner från SAT



Satisfierbarhetsproblem

Allmänt:

Indata: Boolesk formel med booleska variabler

Fråga: Finns det någon variabeltilldelning som satisfierar formeln?

Olika varianter med olika krav på indataformeln.

SAT Formeln får innehålla operatorerna $\wedge \; \vee \; \neg \; \Rightarrow \; \equiv$

$$((x_1 \Rightarrow x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_3 \wedge x_4})) \wedge (x_1 \equiv (x_2 \vee x_3))$$

CNF-SAT Formeln måste vara i <u>konjunktiv normalform</u> dvs vara en konjunktion av disjunktioner av literaler, där en literal är en variabel eller en negerad variabel.

$$(\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_{17} \vee \bar{x}_{18}) \wedge x_9$$

k-CNF-SAT Formeln måste vara i CNF och varje disjunktion (klausul) ska bestå av exakt k literaler.

3CNF-SAT: $(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_9) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_7 \vee x_8)$

Literaler Klausuler

CNF-SAT är NP-fullständigt

1. CNF-SAT $\in$ NP

   Bevis: $\left.\begin{array}{l}\text{SAT} \in \text{NP} \\ \text{CNF-SAT} \leq_p \text{SAT}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{CNF-SAT} \in \text{NP}$

2. CNF-SAT är NP-svårt

   Bevis 1: Använd Cooks sats (som visade att SAT är NP-svårt) och notera att den resulterande formeln kan skrivas om i CNF i polynomisk tid.

   Bevis 2: Reducera SAT till CNF-SAT.
   Givet en SAT-formel φ, konstruera en CNF-formel ψ så att φ är satisfierbar omm ψ är satisfierbar.

3CNF-SAT är NP-fullständigt

1. 3CNF-SAT $\in$ NP

   Bevis: $\left.\begin{array}{l}\text{SAT} \in \text{NP} \\ \text{3CNF-SAT} \leq_p \text{SAT}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{3CNF-SAT} \in \text{NP}$

2. 3CNF-SAT är NP-svårt

   Bevis: Reducera CNF-SAT till 3CNF-SAT
   Givet en CNF-SAT-formel $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ konstruera en 3CNF-SAT-formel ψ som en konjunktion av följande klausuler, för $i \in [1..m]$:

   Anta att c_i består av j literaler.

   - $j=3$: använd c_i direkt i ψ
   - $j=2$: $c_i = (\ell_1 \vee \ell_2)$ använd $(\ell_1 \vee \ell_2 \vee y) \wedge (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \bar{y})$
     där y är en ny variabel.
   - $j=1$: $c_i = (\ell)$ använd $(\ell \vee y_1 \vee y_2) \wedge (\ell \vee y_1 \vee \bar{y}_2) \wedge$
     $\wedge (\ell \vee \bar{y}_1 \vee y_2) \wedge (\ell \vee \bar{y}_1 \vee \bar{y}_2)$
   - $j>3$: $c_i = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_j)$ använd
     $(\ell_1 \vee \ell_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee \ell_3 \vee y_2) \wedge (\bar{y}_2 \vee \ell_4 \vee y_3) \wedge$
     $\wedge \ldots \wedge (\bar{y}_{j-4} \vee \ell_{j-2} \vee y_{j-3}) \wedge (\bar{y}_{j-3} \vee \ell_{j-1} \vee \ell_j)$

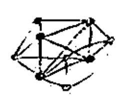
Användbara NP-fullständiga problem

3CNF-SAT

Givet: Boolesk 3CNF-formel $(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$

Fråga: Finns någon variabeltilldelning som satisfierar formeln?

CLIQUE (klick)



Givet: Oriktad graf G, tal K

Fråga: Finns det K hörn i G som är fullständigt sammanbundna?

Independent set (oberoende mängd)

Givet: Oriktad graf G, tal K

Fråga: Finns det K hörn i G som är helt oberoende?

Vertex cover (hörntäckning)

Givet: Oriktad graf G, tal K

Fråga: Finns det K hörn i G som täcker samtliga kanter?

Graph colouring (graffärgning)

Givet: Oriktad graf G, tal K

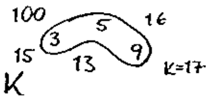
Fråga: Kan hörnen i G färgas med K färger så att inga närliggande hörn har samma färg?

Hamiltonsk cykel

Givet: Oriktad graf G

Fråga: Finns det någon cykel i G som passerar varje hörn i G exakt en gång?

Subset sum (delmängdssumma)



Givet: En mängd positiva tal P, tal K

Fråga: Finns det en delmängd av talen i P vars summa är K?

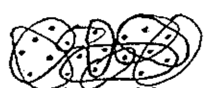
Integer programming (heltalsprogrammering)

Givet: $m \times n$-matris A, m-vektor b, n-vektor c, tal K
alla indata är heltal

Fråga: Finns det en n-vektor x med heltal så att
$Ax \leq b$ och $c \cdot x \geq K$?

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 47$$

Set cover (mängdtäckning)



Givet: Uppsättning delmängder av en mängd M, tal K

Fråga: Finns det K av delmängderna som tillsammans innehåller alla element i M?

0-1-programmering är NP-fullständigt

1. 0-1-programmering $\in NP$

   Bevis: Givet A, b, c och K.

   Gissa (ickedeterministiskt) $x \in \{0,1\}^n$

   Kontrollera att $Ax \leq b$ och att $c \cdot x \geq K$

2. Visa att 0-1-programmering är NP-svårt.

   Bevis: Reducera från 3-CNF-SAT.

   Givet en 3CNF-SAT-formel $\varphi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$

   konstruera A, b, c, K så att φ är satisfierbar omm det finns $x \in \{0,1\}^n$ så att $Ax \leq b$ och $cx \geq K$.

   Inför en variabel x_i för varje variabel y_i i φ.

   Låt $x_i = 0$ motsvara y_i = falsk och $x_i = 1 \Leftrightarrow y_i$ = sann.

   Inför en olikhet för varje klausul C_i.

   $y_i \vee y_j \vee y_k \rightarrow x_i + x_j + x_k \geq 1$

   $y_i \vee y_j \vee \bar{y}_k \rightarrow x_i + x_j - x_k \geq 0$

   $y_i \vee \bar{y}_j \vee \bar{y}_k \rightarrow x_i - x_j - x_k \geq -1$

   $\bar{y}_i \vee \bar{y}_j \vee \bar{y}_k \rightarrow -x_i - x_j - x_k \geq -2$

   Låt $c = (0\,0\,0 \ldots 0)^T$ och låt $K = 0$.

Exempel:

Visa att följande problem är NP-fullständiga!

1. Delgrafsisomorfi

   Givet: Oriktade grafer G_1 och G_2

   Fråga: Är G_1 en delgraf till G_2?

   - Visa att delgrafsisomorfi tillhör NP.
   - Visa att problemet är NP-svårt genom att reducera

2. Mängdpartitionering

   Givet: En mängd S med positiva tal

   Fråga: Kan S delas upp i två disjunkta delar, S_1 och S_2, så att $\sum_{x \in S_1} x = \sum_{y \in S_2} y$?

   - Visa att mängdpartitionering tillhör NP.
   - Visa att problemet är NP-svårt genom att reducera