Viggo Kann, KTH CSC

Lösningar till pretest i reduktionskunskap 2011-10-13

Uppgift 1. Betydelse av reduktioner

Vi vet att B är NP-fullständigt.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} & \mathrm{A} \arrow[l] \arrow[r] & \mathrm{B} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathrm{C} \\ & & \mathrm{D} & \end{tikzcd}$$

	ligger i NP	är NP-fullständigt	är NP-svårt
A	x		
C			x
D	x	x	x
E			

Uppgift 2. Bevis av reduktion

Vi kan till att börja med konstatera att reduktionen har tidskomplexiteten $O(|S|)$ vilket i högsta grad är polynomiskt.

Om vi har en probleminstans som uppfyller $\sigma = 2M$ så kommer L att innehålla samma element som S. Om det finns en delmängd som har summan M så kommer alltså resten av S också att ha summan M, det vill säga vi har en partition. Åt andra hållet: om Partition(L) svarar ja så går det att dela L mitt itu, och delarnas summa är $\sigma/2$, det vill säga M.

Då tittar vi på fallet när $\sigma > 2M$. Då kommer L att bestå av elementen i S kompletterade med ett extra element som är $\sigma - 2 \cdot M$. Totalt har elementen summan $\sigma + \sigma - 2 \cdot M = 2(\sigma - M)$. Om det finns en delmängd som har summan M så kommer resten av S att ha summan $\sigma - M$. Om vi lägger till det extra elementet till den första delmängden så kommer den att få summan $M + \sigma - 2 \cdot M = \sigma - M$, och då är den precis lika stor som resten, varför det finns en partitionering. Å andra sidan, om det finns en partitionering så kommer ena delen att innehålla extraelementet $\sigma - 2 \cdot M$, och eftersom varje del måste vara hälften av $2(\sigma - M)$ stor så blir det vi får kvar om vi tar bort extraelementet $2(\sigma - M)/2 - (\sigma - 2 \cdot M) = M$, vilket betyder att det finns en delmängd av storlek M.

Sista fallet när $\sigma < 2M$ är analogt med förra fallet, med enda skillnaden att det är den del som extraelementet *inte* hamnar i som har den sökta storleken M.