Föreläsning i ADK

- Definition av NP-fullständighet
- Bevis av Cooks sats

NP-fullständiga problem

Ett beslutsproblem Q är NP-fullständigt om

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ Q \in NP \\ 2.\ Q' \leq_p Q \text{ för alla } Q' \in NP \end{array}}$$

där $\leq_p$ är en Karp-reduktion som går i polynomisk tid.

Ett problem som uppfyller villkor 2 är NP-svårt.

Ännu inte bevisad tes:

NP-svåra problem kan inte lösas i polynomisk tid

dvs **$P \neq NP$**

Cooks sats (1971):

SAT, satisfierbarhetsproblemet, är NP-fullständigt

Följdsats: $SAT \leq_p Q \Rightarrow Q$ är NP-svårt

Bevis av Cooks sats

1. $SAT \in NP$ (är enkelt)
2. Visa att $Q' \in NP \Rightarrow Q' \leq_p SAT$

$Q' \in NP \Rightarrow$ det finns en ickedeterministisk Turingmaskin M som accepterar Q' i tid $k \cdot n^c$ där n är indatas längd.

Vi kan anta att M har ett halvoändligt band och alfabet $\{0,1,\#\}$.

Givet indata $(a_1, \ldots, a_n)$, konstruera en boolesk formel ϕ så att $(a_1, \ldots, a_n) \in Q' \Leftrightarrow \phi$ är satisfierbar

$\exists$ beräkning i tid $k \cdot n^c$: $M(a_1, \ldots, a_n)$ accepterar

Låt oss försöka beskriva M-s beräkning med hjälp av en boolesk formel!

$Q' \in NP \Leftrightarrow$ Existerar Turingmaskin M $\Leftrightarrow$ ϕ satisfierbar

ska visas

NUMRERA M-S TIDSSTEG FRÅN 1 TILL $k\cdot n^c$

VID VARJE TIDPUNKT t BESKRIVS BERÄKNINGEN AV

- AKTUELLT TILLSTÅND q
- BANDETS AKTUELLA INNEHÅLL
- HUVUDETS POSITION PÅ BANDET

OBS: VAD SOM FINNS BORTOM POSITION $k\cdot n^c$ PÅ BANDET ÄR INTE INTRESSANT.

INFÖR BOOLESKA VARIABLER:

x_{qt} $\quad q\in Q,\ 1\le t\le k\cdot n^c$

y_{ijt} $\quad i\in\{0,1,\#\},\ 1\le j\le k\cdot n^c,\ 1\le t\le k\cdot n^c$

z_{jt} $\quad 1\le j\le k\cdot n^c,\ 1\le t\le k\cdot n^c$

VI VILL ATT

$x_{qt}=1$ OMM M ÄR I TILLSTÅND q VID TID t

$y_{ijt}=1$ OMM TECKNET i STÅR I RUTA j PÅ BANDET VID TID t

$z_{jt}=1$ OMM HUVUDET STÅR I RUTA j VID TID t

"$\exists$ BERÄKNING I TID $k\cdot n^c$: $M(a_1,\dots,a_n)$ ACCEPTERAR" $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1. \text{ BERÄKNINGEN BÖRJAR MED } a_1\dots a_n \\ 2. \ x,y,z \text{ BESKRIVER EN GILTIG BERÄKNING} \\ 3. \text{ BERÄKNINGEN ACCEPTERAR.} \end{cases}$$

1. $\begin{cases} x_{q,1}=1 & \text{OM } q=q_0 \\ x_{q,1}=0 & \text{ANNARS} \end{cases}$

   $\begin{cases} y_{i,j,1}=1 & \text{OM } (i=a_j \text{ OCH } 1\le j\le n) \text{ ELLER } (i=\# \text{ OCH } j>n) \\ y_{i,j,1}=0 & \text{ANNARS} \end{cases}$

   $\begin{cases} z_{1,1}=1 \\ z_{j,1}=0 & \text{FÖR } j>1 \end{cases}$

3. $x_{q_a,1}=1 \vee x_{q_a,2}=1 \vee \dots \vee x_{q_a,k\cdot n^c}=1$
   DÄR q_a ÄR DET ACCEPTERANDE TILLSTÅNDET

2. FÖR VARJE $2\le t\le kn^c$ KONSTRUERA FORMEL SOM BESKRIVER TILLÅTNA SAMBAND MELLAN $x_{q(t-1)}, y_{ij(t-1)}, z_{j(t-1)}$ OCH x_{qt}, y_{ijt}, z_{jt}

   EX: ÖVERGÅNGEN

   $$q' \xrightarrow{\#/0,R} q''$$

   (OM $\#$ STÅR I RUTAN, SKRIV 0 OCH FLYTTA HUVUDET ETT STEG ÅT HÖGER)

   BESKRIVS SOM

   $$x_{q',(t-1)}=1 \wedge y_{\#,j,(t-1)}=1 \wedge z_{j,(t-1)}=1 \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow \Big[x_{q'',t}=1 \wedge \bigwedge_{q\neq q''} x_{q,t}=0 \wedge$$

   $$\wedge\, y_{0,j,t}=1 \wedge y_{1,j,t}=0 \wedge y_{\#,j,t}=0 \wedge$$

   $$\wedge \bigwedge_{\substack{i\in\{0,1,\#\} \\ j'\neq j}} y_{i,j',t}=y_{i,j',(t-1)} \wedge$$

   $$\wedge\, z_{j+1,t}=1 \wedge \bigwedge_{j'\neq j+1} z_{j',t}=0 \Big]$$

   FÖR $1\le j\le k\cdot n^c$