Christofides algoritm

För approximation av TSP med triangelolikhet inom $\frac{3}{2}$.

Indata: fullständig graf $G=\langle V,E\rangle$ med kantvikter som uppfyller triangelolikheten

Algoritm:

- $E_T \leftarrow$ (minimalt spännande träd för G)
- $V' \leftarrow \{$hörn i V med udda gradtal i trädet $E_T\}$
- $E_M \leftarrow$ (minimal matchning i $G|_{V'}$ dvs grafen inducerad av V')
- Konstruera eulersk tur i $E_T \cup E_M$ (går bra eftersom varje hörn har jämnt gradtal)
- Gör om eulerska turen till en TSP-tur genom att snedda förbi hörn som redan besökts tidigare i turen.

Tidskomplexitet:

Låt $n=|V|$, då är $|E| \in \Theta(n^2)$

$$O(\underbrace{n^2\log n}_{\text{spännande träd}} + \underbrace{n}_{\text{hörn med udda gradtal}} + \underbrace{n^4}_{\text{minimal matchning}} + \underbrace{n^2}_{\text{eulersk tur}} + \underbrace{n^2}_{\text{snedding}}) = O(n^4)$$

Analys av Christofides

Vi vill visa att $\|\text{producerad tur}\| < \frac{3}{2}\text{OPT}$.

$\|\bullet\|$ betyder längden av $\bullet$.

Obs att $\|\underbrace{MST}_{\text{minimalt spännande träd}}(G)\| < \text{OPT}$

$$\|\text{producerad tur}\| < \|\text{eulertur}\| = \underbrace{\|MST(G)\|}_{<\text{OPT}} + \underbrace{\|E_M\|}_{\text{måste visas vara} \le \frac{\text{OPT}}{2}}$$

Betrakta grafen $G|_{V'}$ dvs grafen inducerad av V'.

$\|\text{minimal } TSP(G|_{V'})\| \le \text{OPT}$ eftersom $V' \subseteq V$

Varje TSP-tur genom jämnt antal hörn definierar två matchningar M_1 och M_2

$\|M_1\| + \|M_2\| = \|\text{minimal } TSP(G|_{V'})\|$

E_M är minimal matchning för $G|_{V'}$ så

$\|E_M\| \le \|M_1\|$ och $\|E_M\| \le \|M_2\|$

$\Rightarrow \|E_M\| \cdot 2 \le \|M_1\| + \|M_2\| = \|\text{minimal } TSP(G|_{V'})\| \le \text{OPT}$

$\Rightarrow \|\text{producerad tur}\| < \|MST(G)\| + \|E_M\| < \text{OPT} + \frac{\text{OPT}}{2} = \frac{3}{2}\text{OPT}$

Approximation av TSP

Visa att TSP $\notin$ APX dvs att det inte kan approximeras.

Anta motsatsen, dvs att TSP kan approx. inom f.

Reduktion från Hamiltonsk krets:

```
HamiltonianCircuit(G=<V,E>) =
  n ← |V|
  FOR (v_i,v_j)∈E DO
     t(p_i,p_j)←1; t(p_j,p_i)←1
  FOR (v_i,v_j)∉E DO
     t(p_i,p_j)← |V|·f

  IF TSPAPPROX({p_i}, t) ≤ |V|·f THEN
     RETURN TRUE
  ELSE RETURN FALSE
```

Om TSPAPPROX kan approximera TSP inom faktorn f så avgör ovanstående algoritm ifall det finns en Hamiltonsk krets i G, vilket är NP-fullständigt. Motsägelse!