

FÖRELÄSNING

UNDRE GRÄNSER

- MED BESLUTSTRÅD
EXEMPEL: SORTERING
- MED TUFF MOTSTÅNDARE
EXEMPEL: TALGISSNING
MEDIAN

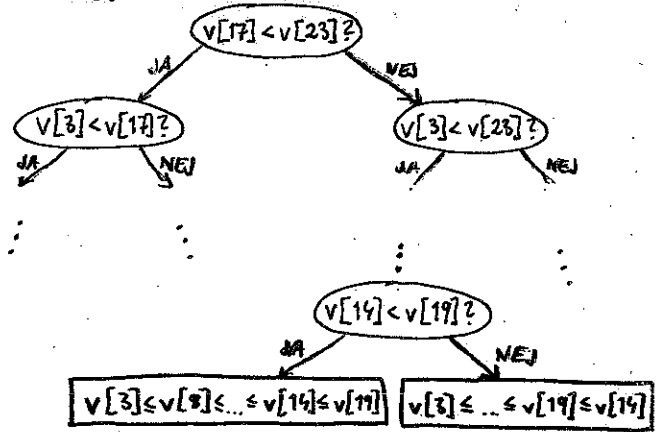
SMART ALGORITM

- FÖR ATT HITTA I-TE MINSTA TALET

HUR MÅNGA JÄMFÖRELSER KRÄVS MINST FÖR ATT SORTERA n ELEMENT?

$$A: \{n \text{ ELEMENT}\} \rightarrow \{n\text{-PERMUTATIONER}\}$$

ANTA ATT DEN ENDA OPERATIONEN (FÖRUTOM TILLDELNING) SOM KAN GÖRAS PÅ ELEMENT ÄR JÄMFÖRELSE MELLAN TVÅ ELEMENT. DÅ KAN ALGORITMEN A BESKRIVAS SOM ETT BESLUTSTRÅD:



TRÄDETS HÖJD = TIDSKOMPLEXITETEN
 ANTALET LÖV \geq ANTALET PERMUTATIONER = $n!$
 ETT BINÄRTRÅD AV HÖJD h HAR HÖGST 2^h LÖV
 \Rightarrow TIDSKOMPLEXITETEN ÄR $\Omega(n \log n)$

OM INGA PERMUTATIONER PÅ FÖRHAND KAN BESLUTAS

TALGISSNING MED TUFF MOTSTÅNDARE

GISSA ETT TAL MELLAN 1 OCH 10 1+++++++10
 3 Större! 4+++++++10
 8 Mindre! 4++++7
 5 Större! 6+-7
 6 Större! 7+7

Du klarade det inte på 4 gissningar. Rätt svar var 7.

```

GISSNING ← 0
MIN ← 1; MAX ← 10
WRITE("GISSA ETT TAL MELLAN " MIN " OCH " MAX)
WHILE MIN < MAX DO
    GISSNING ← GISSNING + 1
    X ← READINTEGER()
    M ← (MIN + MAX) / 2
    IF X < M THEN WRITE("Större!") ELSE WRITE("Mindre!")
    IF X < M AND X ≥ MIN THEN MIN ← X + 1
    IF X ≥ M AND X ≤ MAX THEN MAX ← X - 1
WRITE("DU KLARADE DET INTE PÅ " GISSNING " GISSNINGAR")
WRITE("RÄTT SVAR VAR " MIN)
    
```

KOMPLEXITET FÖR MEDIANPROBLEMET

PROBLEM: HITTA MEDIANEN BLAND n ELEMENT

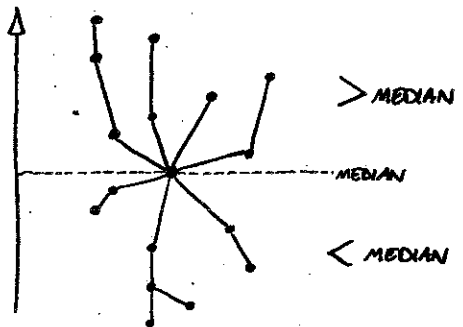
HUR MÅNKA JÄMFÖRELSE KRÄVS FÖR ATT HITTA MEDIANELEMENTET I VÄRSTA FALLET?

TRIVIAL ÖVRE GRÄNS:

FÖLJANDE ALGORITM GÖR $O(n \log n)$ JÄMFÖRELSE
 MERGESORT(S[1..n]); RETURN S[$\frac{n+1}{2}$]

TRIVIAL UNDER GRÄNS:

VARJE ALGORITM SOM HITTAR MEDIANEN MÅSTE GÖRA EN KEDJA AV JÄMFÖRELSE MELLAN VARJE ANNAT TAL OCH MEDIANEN:



ALLSÅ KRÄVS MINST $n-1$ JÄMFÖRELSE.

UNDRE GRÄNS FÖR MEDIAN MED TUFF MOTSTÄNDARE

IDE: VISA ATT EN TUFF MOTSTÄNDARE KAN TVINGA ALGORITMEN ATT GÖRA ONYTTIGA JÄMFÖRELSE.

JÄMFÖRELSEN $x > y$ ÄR ONYTTIG OM $x >$ MEDIANEN OCH $y <$ MEDIANEN.

TAKTIK FÖR TUFFA MOTSTÄNDAREN:

VÄL 0 SOM MEDIAN

TILLDELA ETT VÄRDE FÖRST DÅ ALGORITMEN VILL JÄMFÖRA DET MED NÅGOT ANNAT ELEMENT

JÄMFÖRELSE MELLAN	SVARA	TILLDELA
NYTT OCH NYTT	>	FÖRSTA POSITIVT, ANDRA NEGATIVT
POSITIVT OCH NYTT	>	NEGATIVT TAL
NEGATIVT OCH NYTT	<	POSITIVT TAL
KÄNT OCH KÄNT	SANNINGEN	—

NÄR $\frac{n-1}{2}$ NEGATIVA ELLER $\frac{n-1}{2}$ POSITIVA VÄRDEN HAR TILLDELAETS HAR INTE MOTSTÄNDAREN NÅGOT VAL LÄNGRE.

VARJE ALGORITM KAN PÅ SÅ SÄTT TVINGAS ATT GÖRA $\frac{n-1}{2}$ ONYTTIGA JÄMFÖRELSE UTÖVER DOM $n-1$ NYTTIGA.

VI FÅR UNDER GRÄNSEN $n-1 + \frac{n-1}{2} = \frac{3n-3}{2}$ JÄMFÖRELSE.

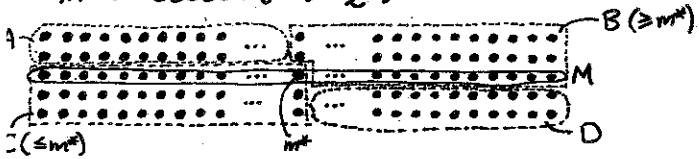
BÄSTA KÄNDA UNDER GRÄNSEN ÄR $2.01n$ [DOR, HÅSTAD, ULFBORG, ZWICK 2001]

HITTA I-TE MINSTA TALET I S

SELECT(S[1..n], i) =

IF $n \leq 5$ THEN SORTERA(S[1..n]); RETURN S[i]

DELA UPP S I $\frac{n}{5}$ GRUPPER MED 5 TAL I VARJE.
 HITTA MEDIANEN I VARJE GRUPP OCH PARTITIONERA GRUPPEN EFTER DEN.
 $M \leftarrow \{ \text{MEDIANER} \}$
 $m^* \leftarrow \text{SELECT}(M, \frac{n/5}{2})$



$S_1 \leftarrow C \cup \{x \in A \setminus D : x \leq m^*\}$
 $S_2 \leftarrow B \cup \{x \in A \setminus D : x > m^*\}$

IF $i = |S_1|$ THEN RETURN m^*
 IF $i < |S_1|$ THEN RETURN SELECT(S_1, i)
 ELSE RETURN SELECT($S_2, i - (n - |S_2|)$)

KOMPLEXITETSANALYS: (ANTAL JÄMFÖRELSE)

$$T(n) \leq 6 \cdot \frac{n}{5} + T(\frac{n}{5}) + 2 \cdot \frac{n}{5} + T(\frac{n}{5} + \frac{n}{2}) = 1.6n + T(0.2n) + T(0.7n)$$

Annotations: HITTA MEDIANERNA I GRUPPERNA, HITTA m^* , FÖRDELA PÅ S_1 OCH S_2 , REKURSION PÅ S_1 ELLER S_2

MAN KAN VISA ATT $T(n) \leq 16n$
 DETTA GER ÖVRE GRÄNSEN $16n$ FÖR MEDIANPROBLEMET.
 BÄSTA KÄNDA ÖVRE GRÄNSEN ÄR $2.95n$ [DOR, ZWICK 1999]