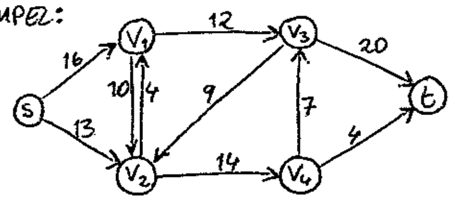
Maximalt flöde i graf

Indata: digraf G med kantvikter $c(u,v) \geq 0$

två speciella hörn i G: källan s, sänkan t

Utdata: ett maximalt flöde genom grafen från s till t så att högst $c(u,v)$ flödar genom kanten (u,v) för varje kant.

Exempel:



Algoritmidé: (Ford-Fulkerson)

- starta med flöde 0
- while ($\exists$ stig längs vilken flödet kan öka) do
  öka flödet längs denna stig så mycket det går

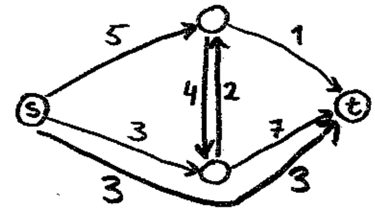
Tidskomplexitet: $O(|V|^3)$ (för bästa implementationen)

Sats: Om $c(u,v) \in \mathbb{N}$ (heltalskapaciteter) så producerar algoritmen ett maximalt flöde med heltalsflöden i varje kant.

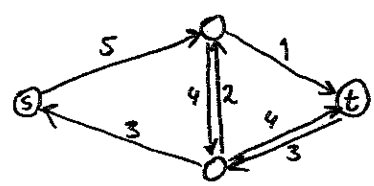
Restflödesgrafen

Ett enkelt sätt att hitta stigar som ökar flödet är att använda restflödesgrafen G_f som har samma hörn som G och en kant från u till v om flödet lokalt från u till v kan ökas; kantens kapacitet $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$, där $f(u,v) = -f(v,u)$.

Exempel: Det utritade flödet 3 i grafen:



ger restflödesgrafen:



Edmonds-Karps algoritm för flöde

Ford-Fulkersons metod där den stig som har minst kanter alltid väljs.

Implementation:

Hitta kortaste stigen i restflödesgrafen med hjälp av breddenförstsökning från s.

Komplexitetsanalys:

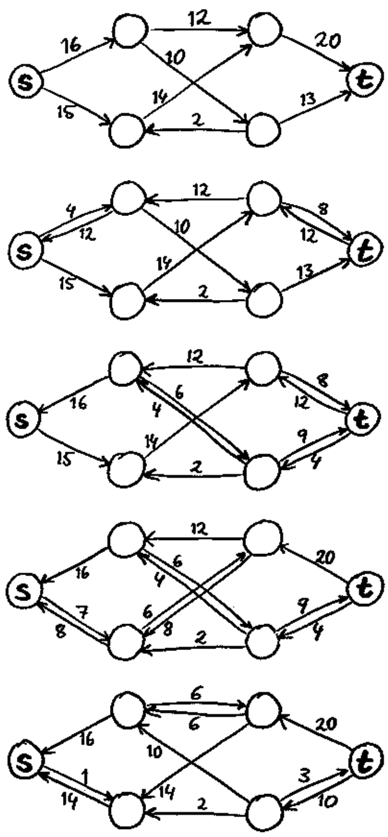
Att hitta kortaste stigen tar tid $O(|E|)$.

Att uppdatera flödet längs stigen tar tid $O(|V|)$.

> **Lemma:** (beviset ingår inte i kursen)
> Om den kortaste stigen väljs i Ford-Fulkersons metod hittas det maximala flödet efter högst $|V||E|$ varv i slingan.

Total tidskomplexitet: $O(|V||E| \cdot |E|) = O(|V||E|^2)$

Flödesexempel



Totalt flöde: 30

Maximalt flöde = minimalt snitt

Givet ett snitt $(S, V-S)$ i flödesgrafen så att $s \in S$ och $t \in V-S$.

Låt $c(S, V-S)$ vara summan av vikterna på dom kanter som korsar snittet från S till $V-S$.

Idé: flödet är mindre än $c(S,V-S)$ för alla snitt

Sats: det maximala flödet $= \min c(S,V-S)$

Bevis: Låt f vara ett maximalt flöde.

Då finns det ingen stig från s till t i restflödesgrafen G_f längs vilken flödet kan öka.

Låt $S = \{v \in V : \exists$ stig från s till v i $G_f\}$

$(S, V-S)$ är ett snitt

För varje kant (u,v) som korsar snittet från S till $V-S$ gäller $f(u,v) = c(u,v)$

$\Rightarrow$ flödet $= c(S,V-S)$

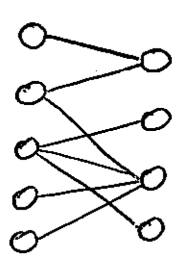
Bipartit matchning

Indata: bipartit graf $\langle U \cup V, E \rangle$

Utdata: en matchning $M \subseteq E$ av maximal storlek

M är en matchning om inga kanter i M har någon gemensam ändpunkt.

Exempel:



Reduktion av bipartit matchning till flöde:

Bipartite-Matching$(U,V,E) =$

- konstruera graf $\langle V', E' \rangle$ som
  $V' = U \cup V \cup \{s,t\}$
  $E' = \{(u,v) : u \in U, v \in V, (u,v) \in E\} \cup$
  $\cup \{(s,u) : u \in U\} \cup$
  $\cup \{(v,t) : v \in V\}$
  $c(e) = 1 \ \forall e \in E'$
- return (Ford-Fulkerson$(V',E') \cap E$)