

## Algoritmer, datastrukturer och komplexitet, hösten 2011

Uppgifter till övning 9

### NP-fullständighetsbevis

På denna övning är det också **inlämning av skriftliga lösningar av teoriuppgifterna till labb 4** och muntlig redovisning av teoriuppgifterna.

---

**Frekvensallokering** Inom mobiltelefonin behöver man lösa *frekvensallokeringsproblemet* som lyder på följande sätt. Det finns ett antal sändare utplacerade. Varje sändare kan sända på någon av en given uppsättning frekvenser. Olika sändare kan ha olika frekvensuppsättningar. Vissa sändare är så nära varandra att dom inte kan sända på samma frekvens, för då skulle dom störa varandra. (Detta beror faktiskt inte så mycket på avståndet som på geografin — om det finns något berg, hus eller liknande som skärmar av.)

Man vet från början vilka sändare som finns, vilken frekvensuppsättning varje sändare har och vilka par av sändare som skulle störa varandra om dom sände på samma frekvens. Problemet är att avgöra ifall det finns något möjligt val av frekvenser så att inte någon sändare stör någon annan.

Formulera detta problem som ett grafproblem och visa att det är NP-fullständigt!

---

**Hamiltonsk stig i graf** Visa att problemet HAMILTONIAN PATH är NP-fullständigt. Problemet är att avgöra ifall det finns någon enkel stig som passerar alla hörn i en graf.

---

**Spännande träd med begränsat gradtal** Visa att följande problem är NP-fullständigt: Givet en oriktad graf  $G = (V, E)$  och ett heltal  $k$ , avgör ifall  $G$  innehåller ett spännande träd  $T$  så att varje hörn i trädet har gradtal högst  $k$ .

---

**Polynomisk reduktion** Konstruera en polynomisk reduktion av 3CNF-SAT till EQ-GF[2], satisfierbarhetsproblemet för ett system av polynomekvationer över GF[2] (alltså heltal modulo 2).

---

**Är en Eulergraf  $k$ -färgbar?** Många problem av typen *avgör om grafen  $G$  har egenskapen  $e$*  kan eventuellt förenklas om vi antar att grafen har någon speciell annan egenskap. Vi ska studera ett specialfall. Vi säger att en sammanhängande graf är en *Eulergraf* om varje hörn i grafen har jämn grad. Vi vill nu avgöra om en sådan graf är  $k$ -färgbar. Vi har närmare bestämt följande problem:

INDATA: En Eulergraf  $G$  och ett heltal  $k$ .

UTDATA: **JA** om grafen är  $k$ -färgbar. **NEJ** annars.

För  $k \leq 2$  finns det en polynomisk algoritm för att avgöra färgbarhet för generella grafer. Vi antar därför att  $k \geq 3$ . Avgör nu om det finns en polynomisk algoritm för att lösa ovanstående problem eller om problemet är NP-fullständigt.

# Lösningar

## Lösning till Frekvensallokering

- a) Formulera frekvensallokeringsproblemet som ett grafproblem.

Låt hörnen motsvara sändare och kanter motsvara sändare som stör varandra. Varje hörn  $v_i$  är märkt med en frekvensuppsättning  $F_i$ . Frågan är om det går tilldela varje hörn en frekvens från dess frekvensuppsättning så att inga hörn som är förbundna med en kant har samma frekvens.

- b) Visa att frekvensallokeringsproblemet ligger i NP.

Gissa (ickedeterministiskt) en frekvenstilldelning. Gå igenom varje hörn och verifiera att dess frekvens är med i frekvensuppsättningen. Gå också igenom varje kant och verifiera att ändpunkternas frekvenser är olika. Detta tar linjär tid i grafens storlek.

- c) Visa att frekvensallokeringsproblemet är NP-svårt.

Reducera  $k$ -färgningsproblemet till frekvensallokering:

```
 $k$ -färgning( $G, k$ ) =  
  för varje hörn  $v_i$  i grafen  $G$   
     $F_i \leftarrow \{1, \dots, k\}$   
  return frekvensallokering( $G, \{F_i\}$ )
```

Visa nu att det finns en  $k$ -färgning av grafen  $G$  om och endast om det finns en tillåten frekvenstilldelning till  $G$  där alla hörn har frekvensuppsättningen  $\{1, \dots, k\}$ .

Anta att vi har en  $k$ -färgning av  $G$ . Numrera färgerna 1 till  $k$ . Om ett hörn har fått färg  $i$  så låter vi motsvarande hörn (sändare) i frekvensallokeringsproblemet få frekvensen  $i$ . Detta blir en tillåten frekvenstilldelning eftersom vi har utgått från en tillåten  $k$ -färgning.

Åt andra hållet: anta att vi har en tillåten frekvenstilldelning. Vi får en  $k$ -färgning genom att låta ett hörn få färg  $i$  om motsvarande sändare har fått frekvens  $i$ .

□

---

## Solution to Hamiltonsk stig i graf

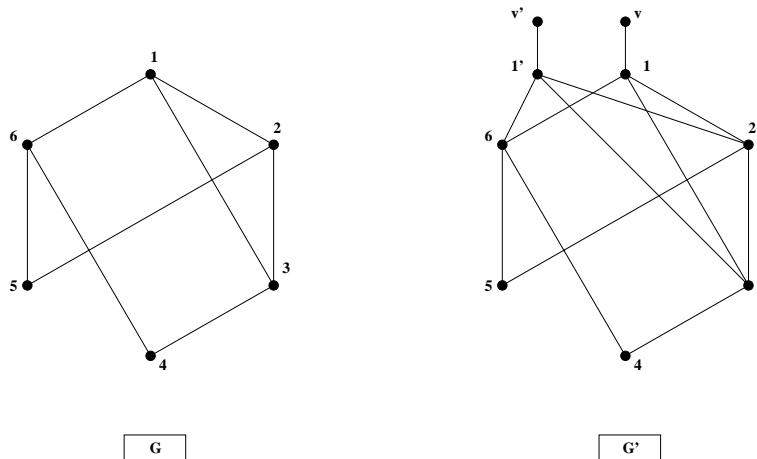
A Hamiltonian path is a simple open path that contains each vertex in a graph exactly once. The HAMILTONIAN PATH problem is the problem to determine whether a given graph contains a Hamiltonian path.

To show that this problem is NP-complete we first need to show that it actually belongs to the class NP and then find a known NP-complete problem that can be reduced to HAMILTONIAN PATH.

For a given graph  $G$  we can solve HAMILTONIAN PATH by nondeterministically choosing edges from  $G$  that are to be included in the path. Then we traverse the path and make sure that we visit each vertex exactly once. This obviously can be done in polynomial time, and hence, the problem belongs to NP.

Now we have to find an NP-complete problem that can be reduced to HAMILTONIAN PATH. A closely related problem is the problem to determine whether a graph contains a Hamiltonian cycle, that is, a Hamiltonian path that begin and end in the same vertex. Moreover, we know that HAMILTONIAN CYCLE is NP-complete, so we may try to reduce this problem to HAMILTONIAN PATH.

Given a graph  $G = \langle V, E \rangle$  we construct a graph  $G'$  such that  $G$  contains a Hamiltonian cycle if and only if  $G'$  contains a Hamiltonian path. This is done by choosing an arbitrary vertex  $u$  in



Figur 2: En graf  $G$  och hamiltonstigsreduktionens konstruerade graf  $G'$ .

$G$  and adding a copy,  $u'$ , of it together with all its edges. Then add vertices  $v$  and  $v'$  to the graph and connect  $v$  with  $u$  and  $v'$  with  $u'$ ; see Figure 2 for an example.

Suppose first that  $G$  contains a Hamiltonian cycle. Then we get a Hamiltonian path in  $G'$  if we start in  $v$ , follow the cycle that we got from  $G$  back to  $u'$  instead of  $u$  and finally end in  $v'$ . For example, consider the left graph,  $G$ , in Figure 2 which contains the Hamiltonian cycle  $1, 2, 5, 6, 4, 3, 1$ . In  $G'$  this corresponds to the path  $v, 1, 2, 5, 6, 4, 3, 1', v'$ .

Conversely, suppose  $G'$  contains a Hamiltonian path. In that case, the path must necessarily have endpoints in  $v$  and  $v'$ . This path can be transformed to a cycle in  $G$ . Namely, if we disregard  $v$  and  $v'$ , the path must have endpoints in  $u$  and  $u'$  and if we remove  $u'$  we get a cycle in  $G$  if we close the path back to  $u$  instead of  $u'$ .

The construction won't work when  $G$  is a single edge, so this has to be taken care of as a special case. Hence, we have shown that  $G$  contains a Hamiltonian cycle if and only if  $G'$  contains a Hamiltonian path, which concludes the proof that HAMILTONIAN PATH is NP-complete.  $\square$

### Solution to Spännande träd med begränsat gradtal

First note that the problem can be solved by the following nondeterministic algorithm:

1. For each edge in  $E$ , choose nondeterministically if it is to be included in  $T$ .
2. Check that  $T$  is a tree and that each vertex has degree less than  $k$ .

This means that the problem is in NP. Now we need to reduce a problem known to be NP-complete to our spanning tree problem. In this way we can state that determining whether a graph has a  $k$ -spanning tree is at least as hard as every other problem in NP.

Consider the problem HAMILTONIAN PATH that was shown to be NP-complete in the previous exercise. Can we reduce this problem to the spanning tree problem? That is, can we solve HAMILTONIAN PATH if we know how to solve the spanning tree problem? We claim that we can and that  $G$  has a Hamiltonian path if and only if it has a spanning tree with vertex degree  $\leq 2$ .

It is easy to see that such a spanning tree is a Hamiltonian path. Since it has degree  $\leq 2$  it cannot branch and since it is spanning only two vertices can have degree  $< 2$ . So the spanning tree is a Hamiltonian path. If, on the other hand,  $G$  contains a Hamiltonian path, this path must be a spanning tree since the path visits every node and a path trivially is a tree.

We have reduced HAMILTONIAN PATH to the spanning tree problem and, therefore, our problem is NP-complete.  $\square$

### Solution to Polynomisk reduktion

Suppose we have a formula  $\varphi \in 3\text{CNF-SAT}$ , for example

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4)$$

Reducing 3CNF-SAT to EQ-GF[2] means that, for every formula  $\varphi$ , we can create an equation that is solvable if and only if  $\varphi$  is satisfiable. Now,  $\varphi$  is only satisfiable if every clause can be satisfied simultaneously, so let's start with finding an equation for an arbitrary clause  $(x \vee y \vee z)$ , where  $x, y$  and  $z$  are considered as literals rather than variables. For a start, the clause is satisfiable with one of the literals set to true, so in that case the equation  $x + y + z = 1$  is also solved. But this fails if two literals are true! We can fix this by adding three more terms, where one and only one is 1 if two variables are 1. We get

$$x + y + z + xy + yz + xz = 1$$

Again, this is not complete. If all variables are set to 1, it fails. Of course, the solution is to add a term for this case,  $xyz$ . Our result is

$$x + y + z + xy + yz + xz + xyz = 1$$

If one of the literals in the clause happened to be inverted, e.g. we have  $\overline{x}$  instead of  $x$ , replace  $x$  by  $(1 + x)$  in the equation. The first clause in the example would be turned into

$$x_1 + x_2 + (1 + x_3) + x_1x_2 + x_1(1 + x_3) + x_2(1 + x_3) + x_1x_2(1 + x_3) = 1$$

We are now ready to create an equation from an arbitrary 3-CNF formula  $\varphi$ . For every clause  $\varphi_i$  in  $\varphi$ , create a corresponding equation  $Q_i$ . Our claim is that this system of equations is solvable if and only if  $\varphi$  is satisfiable and we must prove that this is correct.

To begin with, we note that  $(1 + x)$  is a proper way to handle inverses,  $1 + 1 = 0$  and  $1 + 0 = 1$ , so in the following we will only consider literal values and not variables.

1. ( $\Leftarrow$ ) If an equation in  $Q_i$  is satisfiable, then there exists an assignment to the variables such that each left hand expression is summed to 1. Hence, at least one of the literals is 1 and the corresponding literal in the boolean formula set true would make it's clause satisfied. The equation system  $Q_i$  being satisfied means that each equation is satisfied and consequently is each clause in  $\varphi$  satisfied.
2. ( $\Rightarrow$ ) When  $\varphi$  is satisfied, we have an assignment on the variables such that each clause is satisfied. There are three cases for the clauses, (i) one literal is true, (ii) two literals are true and (iii) three literals are true. By construction, the corresponding equations are all satisfied.

□

---

### Lösning till Är en Eulergraf $k$ -färgbar?

Problemet är NP-fullständigt. Det är enkelt att visa att problemet ligger i NP genom att gissa en färgning och verifiera att den är korrekt. För att visa fullständighet reducerar vi det generella  $k$ -färgningsproblemet till vårt problem. Vi antar att  $k \geq 3$ . Anta att vi har en graf  $G$ . Vi gör om den till en Eulergraf  $G'$  på följande sätt: Det måste finnas ett jämnt antal hörn med udda grad. Dela in dessa hörn i par. För varje par införs ett nytt hörn. Till detta hörn dras två kanter, en från vart och ett av de gamla hörn som genererat det nya hörnet. Grafen  $G$  plus de nya hörnen och kanterna utgör grafen  $G'$ . Det är lätt att se att  $G'$  är en Eulergraf.

Vi visar nu att  $G$  är  $k$ -färgbar  $\Leftrightarrow G'$  är  $k$ -färgbar. Anta att  $f$  är en färgning av  $G$ , det vill säga att varje hörn  $x$  får en färg  $f(x)$ . Vi definierar då en  $k$ -färgning  $f'$  av  $G'$  på följande sätt: Om  $x$  är ett hörn i  $G'$  som också tillhör  $G$  sätts  $f'(x) = f(x)$ . Om  $x$  inte tillhör  $G$  så finns det två grannhörn  $y$  och  $z$  i  $G$ . Vi sätter då  $f'(x)$  till någon annan ledig färg än  $f(y)$  och  $f(z)$ . (Det är möjligt att göra det eftersom  $k \geq 3$ .) Implikationen åt andra hållet är trivial. □